Österreichische
Mathematische
Gesellschaft

MATHE-BRIEF

März 2019 — Nr. 97

Herausgegeben von der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft
http: // www.oemg.ac.at / Mathe–Brief ——— mathe–brief@oemg.ac.at

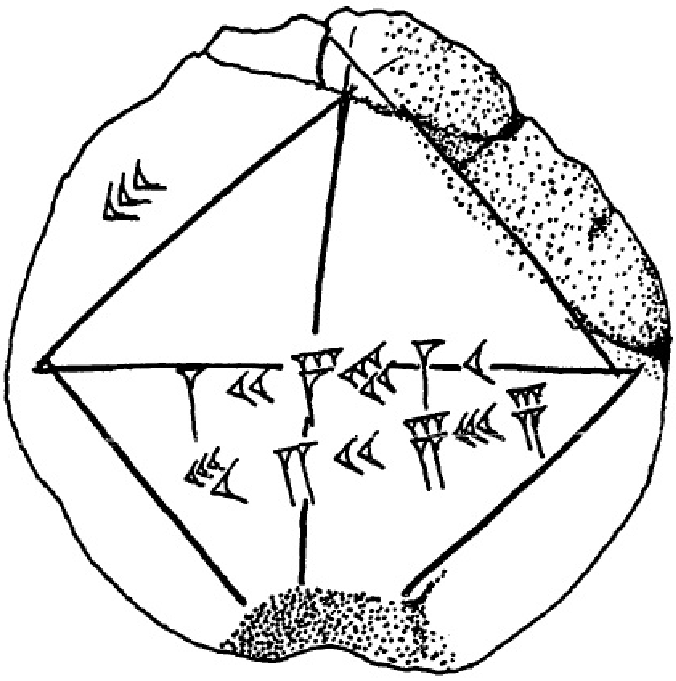
DIE PYTHAGORÄISCHE KONSTANTE

Dem Andenken von Univ. Prof. Dr. Gilbert Helmberg (1928–2019)
Er begründete den Mathe-Brief und weiß nun hoffentlich, ob die Riemann-Vermutung stimmt.

Woher der mitunter verwendete Name der Protagonistin des aktuellen Mathe-Briefs, nämlich der Zahl

$$\sqrt{2} = 1.4142135623730950488016887242096980785696718753769480731766 7\ldots,$$

stammt, liegt im Dunklen. Steht doch die Natur dieser Zahl diametral im Widerspruch zum Programm und Ziel der pythagoräischen Schule, die Welt durch natürliche Zahlen und entsprechende Zahlenverhältnisse zu beschreiben und erklären. Im Folgenden werden wir einigen Besonderheiten der Zahl $\sqrt{2}$ nachspüren. Ein frühes Zeugnis, auch ihrer Berechnung, findet sich auf der babylonischen Steintafel YBC 7289[1]



[1]Genaueres dazu etwa in *http://www.maa.org/press/periodicals/convergence/the-best-known-old-babylonian-tablet* mit dem lesenswerten Abschnitt „YBC 7289 in the Classroom“.

(Sie geht auf die Zeit von 1800 bis 1600 v. Chr. zurück und ist hier in schematischer Form wiedergegeben.) Der auf ihr im Sexagesimalsystem angegebene sehr genaue Zahlenwert lautet in moderner Schreibweise

$$(1.[24][51][10])_{60} = 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} = \frac{305470}{216000} = 1.41421\overline{296}$$

und ist der bestmögliche Näherungswert mit drei Nachkommastellen in babylonischer Darstellungsweise.

Alte indische Texte aus der Zeit zwischen 800 und 200 v. Chr., die *Sulbasutras*, enthalten geometrische Vorschriften zur Anlage von Altären. Darin findet sich auch eine Anweisung zur Konstruktion der Zahl $\sqrt{2}$, die zu folgender befremdlich anmutenden Näherungsformel führt:

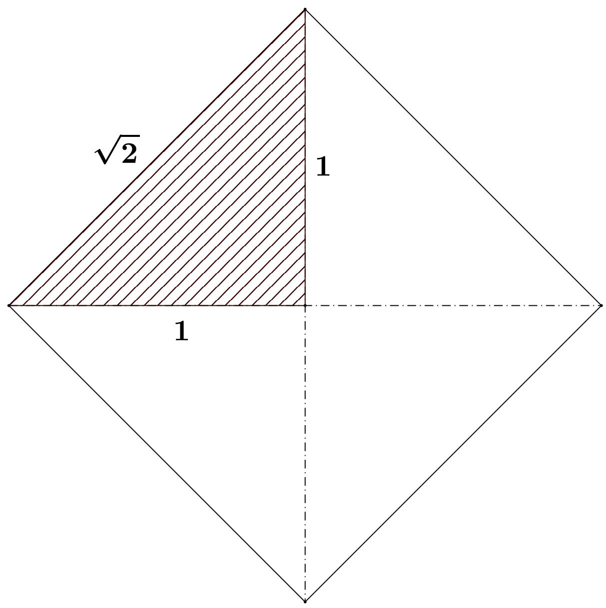
$$\sqrt{2} \approx 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 34} = \frac{577}{408} = 1.41421\overline{5686274509803921}$$

(Man vermutet, dass dieser und manch ähnlicher Formel taylorähnliche Wurzelnäherungen der Art

$$\sqrt{a^2 + x} \approx a + \xi - \frac{\xi^2}{2(a+\xi)} \text{ mit } \xi = \frac{x}{2a}$$

zu Grunde liegen dürften, wobei wir in ihr speziell $a = 4/3$ und $b = 2/9$ zu wählen haben.)

Diese zwei Beispiele sind eher statischer Natur – einen gänzlich anderen dynamischen Weg hat dagegen wesentlich später (im ersten nachchristlichen Jahrhundert) Heron von Alexandria beschritten. Überlegungen der Art



hatten schon früh – noch lange vor der Bildung des exakten Wurzelbegriffs – den Zusammenhang zwischen Quadratwurzeln und dem Flächeninhalt entsprechender Quadrate nahe gelegt. Die Idee hinter Herons Vorgehen zur Berechnung von $\sqrt{2}$ besteht darin, von einem Rechteck mit Flächeninhalt 2, etwa dem 1×2-Rechteck, auszugehen und sukzessive die Seitenlänge des $\sqrt{2} \times \sqrt{2}$-Quadrats anzunähern, indem man die Längsseite des neuen Rechtecks als das arithmetische Mittel der Längsund Breitseite des zuletzt bestimmten Rechtecks bildet, und die Breitseite so, dass sich der Flächeninhalt 2 ergibt. In moderner Schreibweise verbirgt sich dahinter folgende Rekursion mit den Seitenlängen x_n und $\frac{2}{x_n}$ des n-ten Näherungsrechtecks:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right), \quad n \geq 0,$$

wobei man beispielsweise mit dem 1×2-Rechteck, also mit $x_0 = 1$, beginnt und damit die Folge

$$(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots) = \left(1, \frac{3}{2}, \frac{17}{12}, \frac{507}{408}, \frac{665857}{470832}, \ldots\right)$$

erhält, in der sich die Anzahl der korrekten Dezimalstellen in jedem Schritt annähernd verdoppelt. Intuitiv ist es einsichtig, dass die angegebene Folge gegen $\sqrt{2}$ konvergiert. Dass dies tatsächlich so ist, ergibt sich wegen

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right) = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n}, \quad n \geq 0,$$

aus allgemeinen Tatsachen des Newtonschen Näherungsverfahrens

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n \geq 0,$$

zur Lösung gewisser Gleichungen $f(x) = 0$, wenn wir als Funktion $f(x) = x^2 - 2$ wählen.

Im Gegensatz zu den „statischen“Berechnungsmethoden von $\sqrt{2}$ bietet das Heron-Verfahren die Möglichkeit, den Wert beliebiger Quadratwurzeln $\sqrt{a}$, $a > 0$, beliebig genau zu „berechnen“, wenn man die Rekursionsformel zu

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right), \quad n \geq 0,$$

mit (beispielsweise) $x_0 = 1$ modifiziert. Natürlich könnte man auch das von Heron favorisierte arithmetische Mittel durch andere Mittelwerte ersetzen und damit andere Typen von Rekursionsformeln erhalten.

All die bisher vorgestellten Methoden liefern mehr oder weniger gute und für die Praxis im Allgemeinen ausreichende Näherungswerte von $\sqrt{2}$, ergeben aber keinerlei Aussagen über die algebraische Natur von $\sqrt{2}$, also, ob die Zahl rational oder irrational, und zwar algebraisch oder transzendent, ist.

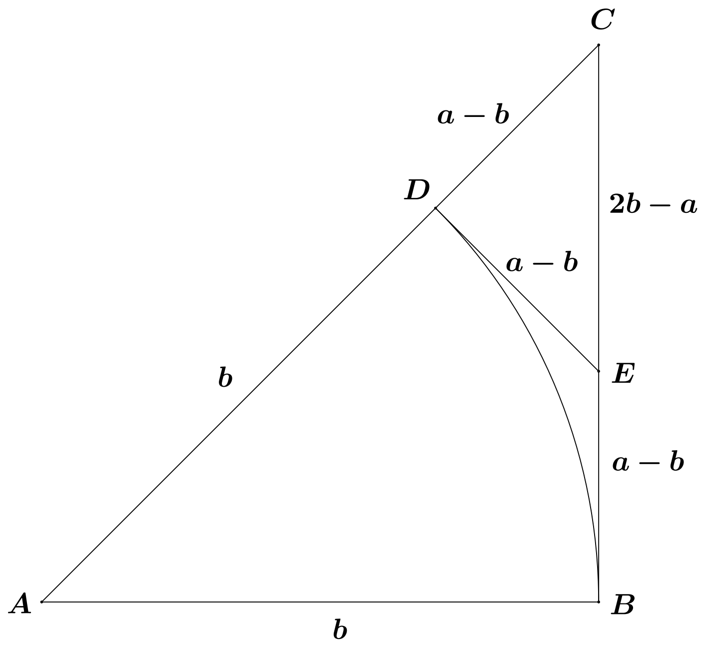
Letzteres kann sofort ausgeschlossen werden, da $\sqrt{2}$ Nullstelle des Polynoms $f(x) = x^2 - 2 \in \mathbb{Z}[x]$ ist.

Dem pythagoräischen Programm zufolge sollte gelten, dass die Diagonalen- und Seitenlänge eines Quadrats kommensurabel seien, also in einem rationalen Zahlenverhältnis stehen. Es dürfte allerdings bereits einigen Mitgliedern der pythagoräischen Schule bekannt gewesen sein, dass dies nicht stimmen kann, dieses Wissen aber geheim gehalten wurde[2].

In [4] sind 29 Beweise für die Irrationalität von $\sqrt{2}$ versammelt. Es soll nun an einige davon erinnert werden, der ursprünglichen griechischen Denkart folgend, zuerst an einen geometrischen:

• Angenommen, $\sqrt{2}$ wäre rational, d.h. $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ mit $a > b$. Aus $a = b\sqrt{2}$ ergibt sich die Existenz des gleichschenkelig-rechtwinkeligen Dreiecks ABC mit den Katheten b und der Hypotenuse a. Der Kreis k mit Mittelpunkt A und Radius b schneidet die Hypotenuse im Punkt D und es folgt $\overline{DC} =$

[2] Der Legende nach hat der Geheimnisverrat dem Pythagoräer Hippasos von Megapont das Leben gekostet ...



$a-b$. Die Normale auf AC im Punkt D ist Tangente von k. Sie soll BC im Punkt E schneiden. Das rechtwinkelige Dreieck CDE ist auch gleichschenkelig mit Kathetenlänge $a-b$. Weil ED und EB Tangentenabschnitte von E zu k sind, ergibt sich $\overline{EB} = \overline{ED} = a-b$, also $\overline{CE} = b-(a-b) = 2b-a$. Damit haben wir aber das weitere (kleinere) Dreieck CDE mit ganzzahligen Seitenlängen gefunden, aus dem sich $\sqrt{2} = \frac{2b-a}{a-b}$ ergibt. Aus diesem Dreieck erhält man analog ein weiteres noch kleineres derartiges Dreieck mit ganzzahligen Seitenlängen, usw. Dies ist aber nicht möglich, weil die Menge der natürlichen Zahlen nach unten beschränkt ist.

• Der ursprünglich auch in geometrischer Sprache formulierte und von Euklid im Appendix seiner Elemente festgehaltene Beweis ist wohl der gebräuchlichste, setzt aber doch einiges an elementarzahlentheoretischem Verständnis voraus, enthält aber auch das Potential der Verallgemeinerung auf alle Primzahlen p: Nehmen wir an, $\sqrt{p}$ wäre rational, hätte also eine Darstellung $\sqrt{p} = \frac{a}{b}$ mit teilerfremden natürlichen Zahlen a und b. Dann folgt $a^2 = pb^2$. Wegen des Lemmas von Euklid muss die Zahl a durch p teilbar sein, d.h. es ist $a = p\alpha$ mit $\alpha > 0$ und ganz. Damit ergibt sich aber $p\alpha^2 = b^2$, also muss auch b durch p teilbar sein, was im Widerspruch dazu steht, dass a und b teilerfremd sind.

• Ein sehr kurzer Beweis dafür, dass $\sqrt{p}$ für alle Primzahlen p irrational ist, verwendet die Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung in $\mathbb{N}$: Wir gehen wie zuerst von $a^2 = pb^2$ aus. Auf der linken Seite kommt jeder Primfaktor mit einem geradzahligen Exponenten vor, auf der rechten Seite dagegen auch jeder, bis auf den Primfaktor p.

• Eine Idee des vorletzten nun vorgestellten Beweises werden wir später noch kurz weiterverfolgen. Angenommen, die Zahl $z := \sqrt{2}$ wäre rational, es gäbe also natürliche Zahlen a und b mit $z = \frac{a}{b}$, wobei der Nenner b kleinstmöglich sein soll. Dann haben wir der Reihe nach

$$(z-1)(z+1) = 1 \iff z+1 = \frac{1}{z-1} \iff z = \frac{2-z}{z-1} \iff z = \frac{2b-a}{a-b}.$$

Aus $b < a = \sqrt{2}b < 2b$ ergibt sich $0 < a - b < b$. Deshalb ist z auch durch einen Bruch mit dem kleineren Nenner $a - b$ dargestellt, was im Widerspruch zur Minimalität von b steht.

• Im folgenden letzten Beweis der Nichtrationalität von $\sqrt{2}$ zeigt man auf konstruktivem Weg, dass zwischen $\sqrt{2}$ und jeder rationalen Zahl $\frac{a}{b}$ ein apriori quantifizierbarer Abstand liegt[3]. Wir haben früher schon gezeigt, dass die zwei natürlichen Zahlen a^2 und $2b^2$ verschieden sein müssen, d.h. es gilt $|2b^2 - a^2| \geq 1$. Deshalb ergibt sich

$$\left|\sqrt{2} - \frac{a}{b}\right| = \frac{|2b^2 - a^2|}{b^2\left(\sqrt{2} + \frac{a}{b}\right)} \geq \frac{1}{b^2\left(\sqrt{2} + \frac{a}{b}\right)} \geq \frac{1}{3b^2}.$$

Die letzte Ungleichung ist für $b\sqrt{2} + a > 3b$, also $\frac{a}{b} < 3 - \sqrt{2}$, unmittelbar einsichtig. Dagegen haben wir für $\frac{a}{b} \geq 3 - \sqrt{2}(> \sqrt{2})$ im Fall $b = 1$ (samt $a \geq 3 - \sqrt{2}$, d.h. $a \geq 2$), dass

$$|\sqrt{2} - \frac{a}{b}| = a - \sqrt{2} \geq 2 - \sqrt{2} > \frac{1}{3} = \frac{1}{3b^2},$$

und für $b \geq 2$, dass

$$|\sqrt{2} - \frac{a}{b}| = \frac{a}{b} - \sqrt{2} \geq 3 - 2\sqrt{2} > \frac{1}{12} \geq \frac{1}{3b^2}.$$

Beispielsweise lässt sich mit der Idee, die im zuletzt angegebenen Beweis verwendet wurde, auch folgende hübsche Eigenschaft der Zahl $\sqrt{2}$ nachweisen:[4] Es sei k eine positive ganze Zahl. Wenn in der Dezimaldarstellung von $\sqrt{2}$ ein Block von k aufeinander folgenden Nullen auftritt, dann kann die erste Null dieses Blocks frühestens an der k-ten Stelle nach dem Komma stehen.

Im verbleibenden Teil dieses Mathe-Briefs soll nun noch einiges Bemerkenswerte über die Zahl $\sqrt{2}$ berichtet werden.

(1) Mit dem Vorgehen aus dem vorletzten Beweis kann man (formal) die reguläre Kettenbruchentwicklung der Zahl $z = \sqrt{2}$ erhalten, nämlich ergibt

$$z - 1 = \frac{1}{z+1} \Leftrightarrow z = 1 + \frac{1}{1+z}$$

sukzessive

$$z = 1 + \frac{1}{1 + \left(1 + \frac{1}{1+z}\right)} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1+z})} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2+\ldots})}$$

und damit $\sqrt{2} = [1; 2, 2, 2, \ldots]$ als Kettenbruchentwicklung. Wenn man dabei die Folge der Näherungsbrüche, also die Folge $(z_n)_{n\geq 1}$, betrachtet, erhält man $z_1 = 1$, $z_2 = [1; 2] = \frac{3}{2}$, $z_3 = [1; 2, 2] = \frac{7}{5}$, $z_4 = [1; 2, 2, 2] = \frac{17}{12}$, $z_5 = [1; 2, 2, 2, 2] = \frac{41}{29}$ usw. Für die Brüche $z_n = \frac{a_n}{b_n}$ lassen sich viele interessante Eigenschaften nachweisen, beispielsweise

[3] Hinter dieser Idee verbirgt sich eine sehr allgemeine Tatsache, nämlich der Approximationssatz von Liouville, der Folgendes besagt: Für jede irrationale algebraische Zahl $\xi \in \mathbb{R}$ gibt es eine nur von ihr abhängige Konstante $C(\xi) > 0$ derart, dass für alle ganzen Zahlen a und b mit $b > 0$ die Ungleichung

$$|\xi - \frac{a}{b}| > \frac{C(\xi)}{b^n}$$

erfüllt ist. Dabei ist n der Grad des Minimalpolynoms von ξ über $\mathbb{Q}[x]$.

[4] Vgl. [5] Bundeswettbewerb Mathematik 2019 (Deutschland), 1. Runde, Aufgabe 4.

- die zwei Rekursionsbedingungen $a_{n+1} = a_n + 2b_n$ und $b_{n+1} = a_n + b_n$, $n \geq 1$, mit $a_1 = b_1 = 1$, die insbesondere auf $b_{n+2} = 2b_{n+1} + b_n$, $n \geq 1$, mit $b_1 = 1$ und $b_2 = 2$ führen und damit die Näherungsnenner als Pell-Zahlen ausweisen,
- die wichtige Tatsache, dass die Brüche $\frac{a_n}{b_n}$ in einem mathematisch exakt fassbaren Sinn die jeweils bestmöglichen Näherungen von $\sqrt{2}$ sind, für die überdies die Abschätzungen
$$\frac{1}{2b_n b_{n+1}} < \left|\sqrt{2} - \frac{a_n}{b_n}\right| < \frac{1}{b_n b_{n+1}}$$
gelten, und
- Bezüge zu den zwei Pellschen Gleichungen $x^2 - 2y^2 = \pm 1$, deren gesamte Lösungsmenge über $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ durch die Zahlenpaare (a_n, b_n) beschrieben wird[5].

(2) In der kurzen und lesenswerten Notiz [3] findet sich u. a. der Beweis dafür, dass die unendlich iterierte Exponentialgleichung
$$x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} = 2$$
die Zahl $x = \sqrt{2}$ als einzige Lösung besitzt.

(3) Bekannt ist, dass es keine zwei rationalen Zahlen gibt, die sich im gleichen Abstand von $\sqrt{2}$ befinden. Meines Wissens ungelöst ist dagegen die schwierige Frage nach der größten Menge, in der es keine zwei Elemente gibt, die von $\sqrt{2}$ gleich weit entfernt liegen.

(4) Die Zahl $\sqrt{2}$ hat folgende kuriose Darstellung
$$\sqrt{2} = \sqrt{\frac{2}{2^{2^0}} + \sqrt{\frac{2}{2^{2^1}} + \sqrt{\frac{2}{2^{2^2}} + \sqrt{\frac{2}{2^{2^3}} + \ldots}}}},$$
die man als Spezialfall einer allgemeinen Formel erhält[6].

(5) Zum Abschluss sollen noch einige wenige auch ästhetisch ansprechende Verbindungen der pythagoräischen Konstante $\sqrt{2}$ zur Kreiszahl π vermerkt werden.
- Auf Vieta geht die Darstellung
$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}{2} \cdots$$
von $\frac{2}{\pi}$ als unendliches Produkt zurück.
- Mit der Halbwinkelformel der sin-Funktion erhält man folgenden allgemeinen Satz: Für eine natürliche Zahl $n \geq 1$ und die Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \{-1; 1\}$ gilt
$$2\sin\left(\left(a_1 + \frac{a_1 a_2}{2} + \frac{a_1 a_2 a_3}{4} + \ldots + \frac{a_1 a_2 \ldots a_n}{2^{n-1}}\right)\frac{\pi}{4}\right)$$
$$= a_1\sqrt{2 + a_2\sqrt{2 + a_3\sqrt{2 + \ldots + a_n\sqrt{2}}}}.$$

---

[5] Mutatis mutandis lassen sich diese Aussagen für Näherungsbrüche von $\sqrt{D}$ modifizieren, wenn D eine quadratfreie natürliche Zahl ist.

[6] Vgl. etwa *http://mathworld.wolfram.com/NestedRadical.html*.

Mit Hilfe von $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ergeben sich analoge Formeln für die entsprechenden cos-Werte.
- Für $m \to \infty$ gilt

$$2^m \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}} \to \pi,$$

wobei m Wurzelzeichen auftreten und nur vor der zweiten Wurzel ein $-$ steht.
- Obwohl bis jetzt noch nicht bekannt ist, ob es für die Zahl $\sqrt{2}$ eine sog. BBP-Formel gibt[7], sind für die Zahl $\pi\sqrt{2}$ derartige Formeln bekannt, vgl. etwa [6].

Damit hat diese kleine Exkursion ihr Ende gefunden – sie war hoffentlich nicht allzu beschwerlich. Und hoffen wir, dass manch offenes Problem doch noch gelöst werde!

Walther Janous

LITERATUR

[1] STEVEN R. FINCH. *Mathematical Constants*, Cambridge Univ. Press 2003.
[2] DAVID FLANNERY. *The Square Root of 2*, Copernicus Books 2006.
[3] HELMUT LÄNGER. *An elementary proof of the convergence of iterated exponentials*. Elem. Math. 51 (1996), 75-77.
[4] *http://www.cut-the-knot.org/proofs/sq_root.shtml*
[5] *https://www.mathe-wettbewerbe.de/bwm/*
[6] *http://mathworld.wolfram.com/BBP-TypeFormula.html*
[7] *http://numbers.computation.free.fr/Constants/Sqrt2/sqrt2.html*

[7] Dabei handelt es sich um (konvergente) Summendarstellungen von Zahlen z in der Form $z = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{p(j)}{b^j q(j)}$, wobei $b \geq 2$ eine ganze Zahl ist und das für die Darstellung verwendete Zahlensystem angibt und p und q Polynome in $\mathbb{Z}[x]$ sind. Sie wurden von den drei Mathematikern Bailey, Borwein und Plouffe im Umfeld der sog. „experimental mathematics“ausführlich untersucht. Das wohl spektakulärste Resultat in dieser Richtung ist die Möglichkeit eine beliebige Ziffer von π im Hexadezimalsystem zu berechnen, ohne die vorherigen Ziffern bestimmen zu müssen.