



Herausgegeben von der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft
<http://www.oemg.ac.at/Mathe-Brief> ——— mathe-brief@oemg.ac.at

Das Hexagramma Mysticum von PASCAL

BLAISE PASCAL (1623-1662) entdeckte sein *hexagramma mysticum* im Alter von 16 Jahren:

Wenn ein Sechseck einem Kegelschnitt eingeschrieben ist, dann liegen die Schnittpunkte der drei Paare gegenüberliegender Seiten auf einer Geraden.

Um zu klären, was (für uns) „gegenüberliegende Seiten“ bedeutet, bezeichnen wir die Eckpunkte des Sechsecks mit A, B, C, A', B', C' (sie brauchen aber nicht in dieser Reihenfolge auf dem Kegelschnitt zu liegen). Dann sei

- L der Schnittpunkt der „gegenüberliegenden“ Sechseckseiten BC' und $B'C$,
- M der Schnittpunkt der „gegenüberliegenden“ Sechseckseiten CA' und $C'A$,
- N der Schnittpunkt der „gegenüberliegenden“ Sechseckseiten AB' und $A'B$.

Nach dem Satz von PASCAL liegen die Punkte L, M und N auf einer Geraden, ob der Kegelschnitt nun ein Kreis ist, eine Ellipse, eine Parabel, oder eine Hyperbel.

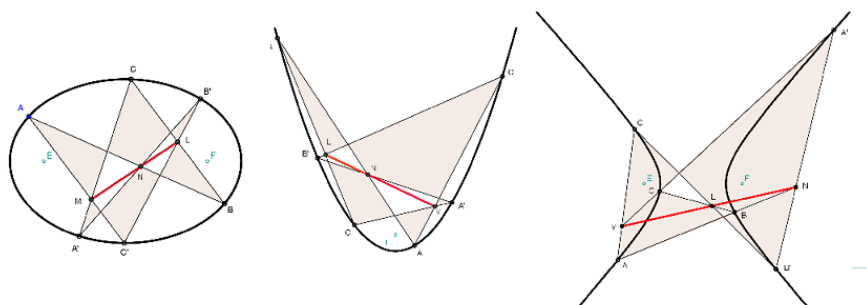


Abbildung 1

Beschränken wir uns bei dem Kegelschnitt auf einen Kreis, so führt ein Beweis dieses Satzes, der nur elementare Geometrie verwendet, über zwei bekannte Sätze der Dreiecksgeometrie, die der Vollständigkeit halber auch gleich noch einmal bewiesen werden:

Der Strahlensatz.

Im folgenden wird die Länge der durch zwei Punkte A und B begrenzten Strecke mit \overline{AB} bezeichnet.

Wenn zwei Geraden mit dem Schnittpunkt C durch zwei parallele Geraden g und g' in den Punkten A und B bzw. A' und B' geschnitten werden, gilt

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{CA'}}{\overline{CB'}}.$$

Die beiden Dreiecke ABC und $A'B'C$ sind nämlich ähnlich. (Ähnliche Dreiecke kamen schon einmal im Mathe-Brief 8 zur Sprache)

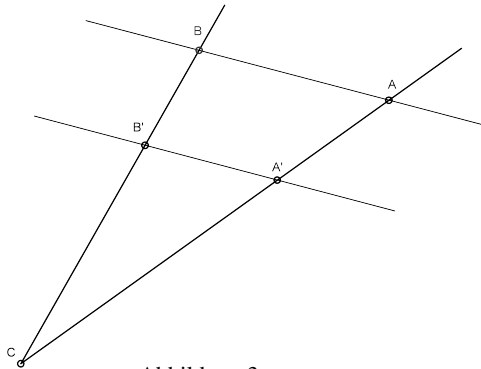


Abbildung 3

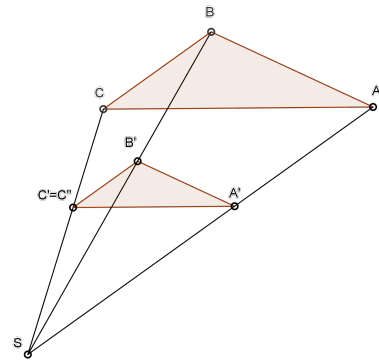


Abbildung 2

Ähnliche Dreiecke in ähnlicher Lage.

Zwei ABC und $A'B'C'$ sind nicht nur ähnlich, sondern auch *in ähnlicher Lage*, wenn jeweils die Seiten AB und $A'B'$, BC und $B'C'$, sowie CA und $C'A'$ parallel sind. Dann lässt sich der Strahlensatz gewissermaßen umkehren:

Wenn die ähnlichen Dreiecke ABC und $A'B'C'$ in ähnlicher Lage sind, dann sind die Verbindungsgeraden AA' , BB' und CC' entweder parallel oder sie gehen durch einen Punkt.

Um das einzusehen, nehmen wir an, die Verbindungsgeraden AA' und BB' schneiden sich im Punkt S . Die Verbindungsgerade SC wird durch die Gerade, die A' und C' verbindet (und parallel zu AC ist), in einem Punkt C'' geschnitten, für den nach dem Strahlensatz

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{A'C''}} = \frac{\overline{SC}}{\overline{SC''}} = \frac{\overline{SA}}{\overline{SA'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$$

gilt, woraus folgt $\overline{A'C'} = \overline{A'C''}$ und $C' = C''$. Das bedeutet wieder, dass die Verbindungsgerade CC' durch den Punkt S geht.

Der Satz von PASCAL für den Kreis.

Wenn ein Sechseck einem Kreis eingeschrieben ist, dann liegen die Schnittpunkte der drei Paare gegenüberliegender Seiten auf einer Geraden.

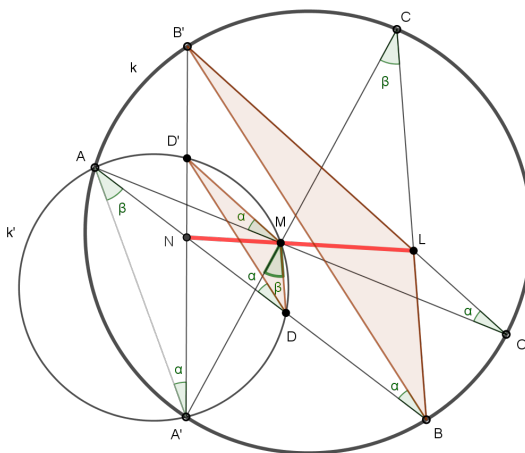


Abbildung 4

Der Beweis beruht auf einer ganzen Reihe von Anwendung des Peripheriewinkelsatzes, der ebenfalls schon im Mathe-Brief 8 zur Sprache gekommen ist.

L ist der Schnittpunkt der Seite BC' und $B'C$, M ist der Schnittpunkt der Seiten AC' und $A'C$. Wir bezeichnen den Kreis, der die Eckpunkte des Sechsecks $AB'CA'BC'$ enthält, mit k , und den Umkreis des Dreiecks $AA'M$ mit k' . Der zweite Schnittpunkt der Verbindungsgeraden $A'B$ mit k' soll D heißen, der zweite Schnittpunkt der Verbindungsgeraden AB' mit k' soll D' heißen. Die Verbindungsgeraden BD und $B'D'$ schneiden sich in einem Punkt N . Wir zeigen jetzt, dass die Dreiecke $BB'L$ und $DD'M$ ähnlich und in ähnlicher Lage sind. Dann muss auch die Verbindungsgerade LM durch den Punkt N gehen, und der Satz von PASCAL ist gezeigt.

Um unsere Behauptung zu beweisen, zeigen wir, dass jeweils die Geraden DD' und BB' , MD und LB , sowie MD' und LB' parallel sind. Dies beruht auf einer Reihe von Anwendungen des Satzes vom konstanten Peripheriewinkel, einmal im Kreis k' , und dann wieder im Kreis k :

$$\begin{aligned}
 DD' \parallel BB' : \quad & \alpha = \angle ADD' = \angle AA'D' \\
 & = \angle AA'B' \\
 & = \angle ABB' \\
 DM \parallel BL : \quad & \beta = \angle DMA' = \angle DAA' \\
 & = \angle BAA' \\
 & = \angle BCA' \quad (DM \parallel BC; \text{ auf } BC \text{ liegt } BL) \\
 D'M \parallel B'L : \quad & \alpha = \angle D'MA' = \angle D'AA' \\
 & = \angle B'AA' \\
 & = \angle B'CA' \quad (D'M \parallel B'C; \text{ auf } B'C \text{ liegt } B'L)
 \end{aligned}$$

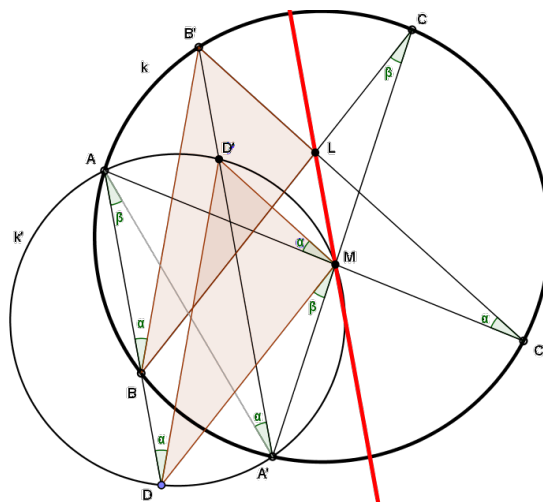


Abbildung 5

Allerdings funktioniert dieser Schluss nur, wenn CA' und AC' nicht parallel sind und damit der Punkt M „ins Unendliche“ verschwindet. Andernfalls, wenn noch einer der Punkte L und N im Endlichen liegt, nummerieren wir die Punkte einfach so um, dass der im Endlichen liegende Punkt im Beweis an die Stelle des Punktes M kommt.

Wenn zwei Punkte, etwa L und M „ins Unendliche“ verschwinden, weil die entsprechenden Sechseckseiten parallel sind, dann sind auf dem Kreis k jeweils die Bögen \widehat{BC} und $\widehat{B'C'}$, sowie \widehat{CA} und $\widehat{C'A'}$ gleich lang,

und deshalb auch die Bögen \widehat{BA} und $\widehat{B'A'}$, also sind auch die Seiten AB' und $A'B$ parallel. In der projektiven Geometrie stellt man sich auf den Standpunkt, daß die Punkte L , M und N dann auf der „unendlich fernen Geraden“ liegen; wenn man auf einem Boot mitten im Meer ist, kann man sie als Horizontlinie beobachten (allerdings müsste man dabei diametral gegenüberliegende Punkte des Horizontes identifizieren).

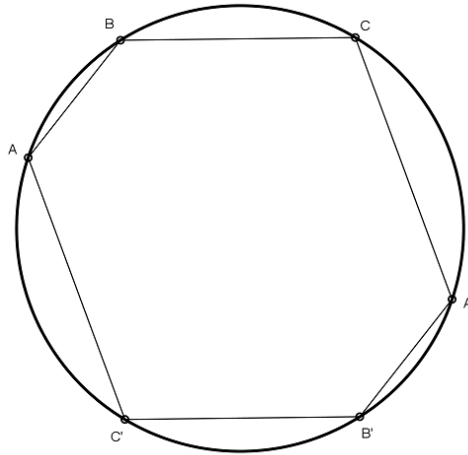


Abbildung 6

Kann man vom PASCALSchen Satz für den Kreis auch zum PASCALSchen Satz für allgemeine Kegelschnitte kommen? Jawohl, aber man braucht dazu etwas räumliches Vorstellungsvermögen: Wenn man die Figur der Abbildung 5 aus einem Punkt S im Raum (z.B. lotrecht über dem Mittelpunkt des Kreises k in der Zeichenebene) projiziert, werden aus allen Punkten der Zeichenebene Geraden durch S und aus allen Geraden der Zeichenebene Ebenen im Raum, die den Punkt S enthalten; aus dem Kreis wird ein Kreiskegel mit der Spitze S , und wenn man diesen nun durch eine weitere, beliebig angenommene, Ebene schneidet, die S nicht enthält, werden aus den Geraden durch S wieder Punkte, aus den Ebenen durch S wieder Geraden, und aus dem Kegelmantel, je nach Lage der neuen Schnittebene, wieder ein Kreis, eine Ellipse, eine Parabel, oder eine Hyperbel, auf der jetzt die Nachkömmlinge der Punkte A , B , C , A' , B' , C' liegen, die wieder den Satz von PASCAL erfüllen. Man muss sich allerdings noch überlegen, dass man auf diese Weise jede Ellipse und Hyperbel erhalten kann.

Ein alternativer Zugang beruht auf der Tatsache, dass jeder Kegel 2. Ordnung (also mit einem beliebigen Kegelschnitt als Grundlinie) zwei Parallelscharen von Kreisschnittebenen hat (bei einem geraden Kreiskegel fallen beide Scharen zu einer zusammen). Ein dem Grundkegelschnitt eingeschriebenes Sechseck wird aus der Kegelspitze in ein Sechseck projiziert, das einem Kreis einer solchen Schar eingeschrieben ist. Dieses Sechseck liefert nach dem obigen Beweis eine PASCALSche Gerade, die aus der Kegelspitze wieder in die PASCALSche Gerade für das Sechseck im Grundkegelschnitt projiziert wird.

COXETER berichtet in [1], dass der Satz von PASCAL 1640 mit der Hilfe von DESARGUES unter dem Titel *Essay pour les Coniques* veröffentlicht wurde. LEIBNIZ hat diesen *Essay* noch gekannt und hoch geschätzt, aber bis auf eine Seite ist er verloren gegangen. Der hier für den Kreis angegebene Beweis stammt vom holländischen Mathematiker JAN VAN IJZEREN (1914-1998) (gesprochen „jan fan aiseren“), einem Schwager und Mitarbeiter von EDGER DIJKSTRA, dem Autor des nach ihm benannten Algorithmus (Mathe-Brief 4).

Literatur

[1] COXETER, H.S.M.: *The Real Projective Plane*, Springer Verlag: Berlin 1992

Gilbert Helmberg