Österreichische
Mathematische
Gesellschaft

MATHE-BRIEF

Jänner 2019 — Nr. 95

Herausgegeben von der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft
http://www.oemg.ac.at/Mathe–Brief ——— mathe–brief@oemg.ac.at

WAS IST EINE FUNKTION?

Von Mathematikern wird im Allgemeinen angenommen, dass sie sich immer hundertprozentig präzise ausdrücken. Umso größer kann die Verwirrung sein, die wir stiften, wenn wir diesem Anspruch einmal nicht ganz gerecht werden. Das kann zum Beispiel passieren, wenn wir sagen, die Funktion

$$\frac{x+\sin\bigl(x+\sqrt{1-x^2}\bigr)}{1+\exp(5+\exp(-x^2))}$$

enthalte einen Sinus. Was meinen wir damit? Kann eine Funktion eine andere enthalten? Wenn wir sagen, dass die Funktion $\sin(x)^2$ einen Sinus enthält, müsste dann nicht auch $1-\cos(x)^2$ einen Sinus enthalten, oder ist das etwa eine andere Funktion? Enthält $|x|^2$ die Betragsfunktion und x^2 nicht? Wenn die Funktion $|x|^2-x^2$ ein Quadrat enthält, was ist dann mit der konstanten Funktion 0?

Informal kann man sich eine Funktion bekanntlich als eine Art Gerät vorstellen, in das man Zahlen eingeben kann und das für jede Eingabe x eine bestimmte Zahl $f(x)$ als Ausgabe produziert.

$$x \longrightarrow \boxed{} \longrightarrow f(x)$$

Man könnte meinen, dass eine Funktion f eine zweite enthält, wenn das Kästchen der zweiten Funktion im Kästchen von f irgendwie verbaut wurde. Allerdings ist zu beachten, dass es für eine Funktion nicht wesentlich ist, wie sie zusammengebaut ist. Ein und dieselbe Funktion lässt sich im Allgemeinen auf viele verschiedene Weisen ausdrücken. Außerdem gibt es viele Funktionen, die sich überhaupt nicht aus einfacheren Funktionen zusammenbauen lassen, und die man sich besser gar nicht erst so vorstellt, dass der Funktionswert $f(x)$ aus dem Argument x nach einem bestimmten Verfahren „berechnet“ wird.

Am besten werfen wir einen Blick auf die formale Definition des Funktionsbegriffs. In manchen Lehrbüchern liest man, eine Funktion $f\colon A\to B$ von einer Menge A in eine Menge B sei eine Menge $P\subseteq A\times B$ von Paaren mit der Eigenschaft, dass es für jedes $a\in A$ genau ein $b\in B$ gibt, sodass das Paar (a,b) zu P gehört. Man schreibt dann $f(a)$ für dieses b. Die Menge P darf dabei gerne so kompliziert sein, dass sich zu einem gegebenen a das passende b mit $(a,b)\in P$ nicht systematisch berechnen lässt. Wichtig ist nur, dass jedes $a\in A$ genau einen Partner $b\in B$ hat. Es kommt also nur auf die Menge P an. Die kann man sich anschaulich als Wertetabelle vorstellen:

x	-5	$5/3$	9	-17	$\cdots$
$f(x)$	28	-19	$32/7$	63	$\cdots$

Dass jedes $a\in A$ genau einen Partner hat, bedeutet, dass in der oberen Zeile der Tabelle jedes Element aus A genau einmal aufscheint.

Wenn nun eine Funktion „in Wirklichkeit“ eine Menge (von Paaren) ist, dann könnten Funktionen prinzipiell ineinander enthalten sein. Bei diesem Enthaltensein handelt es sich aber natürlich um ein ganz anderes Konzept als vorher. Mit der Sichtweise, dass Funktionen einfach Mengen von Paaren sind, wäre zum Beispiel die Funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$ enthalten in der Funktion $g\colon [-5,5] \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = x^2$. Wenn man will, kann man das so sehen. Etwas suspekt ist dabei allerdings, dass es sich bei $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$ und $h\colon [0,1] \to [0,1]$ mit $h(x) = x^2$ um dieselben Funktionen handelt, wenn man in ihnen jeweils nur eine Menge von Paaren sieht. Das kann nicht ganz stimmen, denn die Funktion h ist surjektiv und die Funktion f nicht.

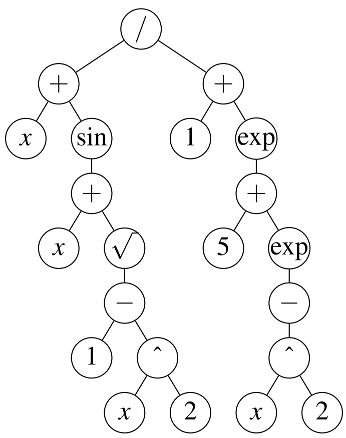
In der offiziellen Definition des Funktionsbegriffs werden deshalb Definitions- und Wertebereich als Bestandteile der Funktion aufgefasst. Demnach ist eine Funktion ein Tripel (A,B,P), wobei A und B Mengen sind und P eine Teilmenge von $A \times B$ mit der oben schon genannten Eigenschaft, dass zu jedem $a \in A$ genau ein $b \in B$ mit $(a,b) \in P$ existiert. Zwei Funktionen (A,B,P) und (A',B',P') sind gleich, wenn $A = A'$, $B = B'$ und $P = P'$ gilt. Die Funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$ ist also eine andere Funktion als $g\colon [-5,5] \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = x^2$ und auch eine andere als $h\colon [0,1] \to [0,1]$ mit $h(x) = x^2$.

Da für zwei Tripel nicht erklärt ist, was es heißen soll, dass eines das andere enthält, können wir auch nicht sinnvoll davon sprechen, dass eine Funktion eine andere enthält. Die offizielle Definition des Funktionsbegriffs taugt deshalb wenig, um der eingangs zitierten unsauberen Sprechweise einen sauberen Sinn zu verleihen. Immerhin bringt sie uns auf eine Spur. Wenn nämlich Definitions- und Wertebereich integraler Bestandteil einer Funktion sind, dann können wir eigentlich gar nicht so einfach von „der Funktion“ $\sin(x)^2$ sprechen.

Aber wenn Definitions- und Wertebereich nun einmal nicht angegeben sind (und wir auch nicht raten wollen, welche Mengen wohl gemeint sein könnten), was könnte $\sin(x)^2$ für sich genommen noch bedeuten? Eine Funktion ist es dann zwar nicht, aber wir können darin immer noch einen *Funktionsausdruck* erkennen. Unter einem (mathematischen) Ausdruck versteht man ein Gebilde, das nach gewissen syntaktischen Regeln aus Formelzeichen (z.B. Variablen, Klammern, Funktionssymbolen usw.) zusammengesetzt ist. Charakteristisch für mathematische Ausdrücke ist, dass man ausgehend von einfachen Ausdrücken nach und nach immer komplexere Ausdrücke bilden kann. Dabei entsteht eine hierarchische Struktur. Die Struktur des Ausdrucks

$$\frac{x + \sin\bigl(x + \sqrt{1 - x^2}\bigr)}{1 + \exp(5 + \exp(-x^2))}$$

lässt sich zum Beispiel durch folgendes Baumdiagramm veranschaulichen:



Durch diese hierarchische Struktur ist es sinnvoll, bei einem Ausdruck von Unterausdrücken zu sprechen. Zum Beispiel enthält der Ausdruck

$$\frac{x+\sin\bigl(x+\sqrt{1-x^2}\bigr)}{1+\exp(5+\exp(-x^2))}$$

die folgenden Unterausdrücke:

$$1,\quad 5,\quad 2,\quad x,\quad x^2,\quad -x^2,\quad 1-x^2,\quad \exp(-x^2),\quad \sqrt{1-x^2},\quad x+\sqrt{1-x^2},$$
$$5+\exp(-x^2),\quad \sin(x+\sqrt{1-x^2}),\quad \exp(5+\exp(-x^2)),\quad x+\sin(x+\sqrt{1-x^2}),$$
$$1+\exp(5+\exp(-x^2))\quad\text{und}\quad \frac{x+\sin\bigl(x+\sqrt{1-x^2}\bigr)}{1+\exp(5+\exp(-x^2))}.$$

Insbesondere kann man sagen, der Ausdruck enthält einen Sinus, wenn man damit meint, dass der Ausdruck einen Unterausdruck hat, dessen äußerstes Funktionssymbol sin lautet. Es ist auch nicht problematisch, dass $|x|^2$ einen Betrag enthält und x^2 nicht, denn obwohl es sich bei $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=|x|^2$ und $g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x^2$ um dieselben Funktionen handelt, handelt es sich bei $|x|^2$ und x^2 um unterschiedliche Ausdrücke.

Ausdrücke sind ein probates Werkzeug zur Beschreibung von Funktionen, aber sie selbst sind etwas anderes als die Funktionen, die durch sie beschrieben werden. Das mag wie eine haarspalterische Unterscheidung klingen, aber interessanterweise erscheint uns die entsprechende Unterscheidung in der natürlichen Sprache ganz selbstverständlich. Das deutsche Wort „Blume“ ist etwas anderes als die Pflanze, die dadurch bezeichnet wird. Während nämlich das Wort „Blume“ aus Buchstaben besteht und keine Blätter oder Blüten hat, besteht eine richtige Blume aus Blättern und Blüten und hat keine Buchstaben.

Natürlich ist es ein Irrglaube, dass Mathematiker sich jederzeit hundertprozentig präzise ausdrücken. Absolute Präzision ist auch weder erforderlich noch erstrebenswert. Wir können aber versuchen zu vermeiden, durch unsaubere Sprechweisen unnötige Verwirrung zu stiften. Man möchte sich wünschen, dass nicht nur Mathematiker sich darum bemühen würden.

Manuel Kauers, JKU Linz

Allen Kolleginnen und Kollegen wünschen wir ein erfolgreiches Neues Jahr 2019. Die Redaktion.