Österreichische Mathematische Gesellschaft

MATHE-BRIEF

November 2018 — Nr. 93

Herausgegeben von der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft
http: // www.oemg.ac.at / Mathe–Brief ——— mathe–brief@oemg.ac.at

Ein geometrisches Optimierungsproblem

Die Transportlogistik spielt in der heutigen Zeit eine immer grössere Rolle, sodass es sicherlich die Mühe wert ist, das eine oder andere damit zusammenhängende Problem aus mathematischem Blickwinkel zu analysieren.

Dazu gehen wir von folgender Situation aus: eine Supermarktkette betreibt Filialen in ganz Österreich und möchte ein Zentrallager an jenem Ort errichten, von dem die Summe der Entfernungen zu den einzelnen Filialen am geringsten ist. In der Realität sind dabei natürlich viele weitere Parameter zu berücksichtigen, wie etwa die Strasseninfrastruktur oder der Umsatz in den einzelnen Filialen. Wir wollen uns aber mit einem einfachen mathematischen Modell begnügen: gegeben seien n Punkte $P_1, \ldots, P_n$ in der Ebene, gesucht ist ein (nicht notwendig *der*, denn es könnte ja mehrere geben) Punkt P, für den die Summe S der Segmentlängen $\overline{PP_1} + \ldots + \overline{PP_n}$ minimal ist.

In dieser Allgemeinheit ist auch das noch zu kompliziert, sodass wir uns auf einige interessante Spezialfälle beschränken werden. Zunächst wollen wir annehmen, dass alle n Punkte auf einer Gerade liegen (o.B.d.A. in der Reihenfolge ihrer Nummerierung). Offensichtlich können wir unsere Suche nach einem optimalen Punkt P auf die durch die Punkte bestimmte Gerade beschränken, denn für jeden Punkt X ausserhalb wird die Summe der Entfernungen zu den P_i verringert, wenn man X orthogonal näher an P_1P_n heranrückt. Für jeden Punkt X, der auf dieser Gerade liegt, gilt klarerweise

$$\overline{P_1X} + \overline{XP_n} \geq \overline{P_1P_n}$$

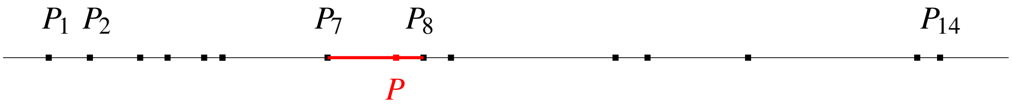
mit Gleichheit genau dann, wenn X zwischen P_1 und P_n liegt. Nun paaren wir die weiteren Punkte von aussen nach innen zu ineinandergeschachtelten Segmenten P_2P_{n-1}, P_3P_{n-2}, etc. Für gerade n entsteht so ein eindeutig bestimmtes innerstes Segment; ist n hingegen ungerade, so bleibt ein Punkt in der Mitte übrig, den wir ebenfalls als innerstes (degeneriertes) Segment auffassen können. Es gilt für $1 \leq i \leq [n/2]$ analog zu oben

$$\overline{P_iX} + \overline{XP_{n-i+1}} \geq \overline{P_iP_{n-i+1}}$$

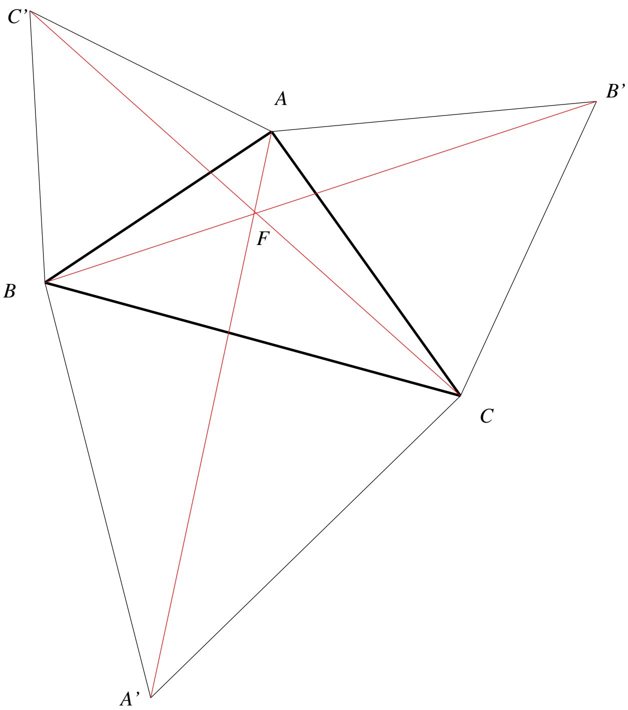
mit Gleichheit genau dann, wenn X zwischen P_i und P_{n-i+1} liegt. Insgesamt folgt

$$S \geq \sum_{i=1}^{[n/2]} \overline{P_iP_{n-i+1}}$$

mit Gleichheit für alle Punkte X im innersten Segment. Damit haben wir also eine eindeutige Lösung für die Wahl von P im Fall, dass n ungerade ist, nämlich $P = P_{(n+1)/2}$. Für gerade n liefern alle Punkte im innersten Segment $P_{n/2}P_{(n+2)/2}$ die gleiche, minimale Summe von Abständen. Die folgende Skizze zeigt den Fall $n = 14$, P kann beliebig in P_7P_8 (in rot) gewählt werden.



Doch welche Supermarktkette hat schon sämtliche Filialen entlang einer geraden Autobahn errichtet? Fangen wir lieber mit einem kleinen Betrieb an, der nur drei Filialen besitzt, und abstrahieren diese durch die Ecken eines Dreiecks ABC in der Ebene. Die Aufgabe lautet nun, denjenigen Punkt P im Dreieck zu finden, für den die Summe der Abstände $\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}$ minimal ist. Besitzt das Dreieck ABC einen Innenwinkel, der mindestens 120 Grad misst, so muss man für P denjenigen Eckpunkt wählen, in dem dieser Winkel auftritt. Sind alle Winkel des Dreiecks kleiner als 120 Grad, so ist derjenige Punkt für P zu wählen, von dem aus alle drei Seiten unter einem Winkel von 120 Grad erscheinen. Dieser Punkt ist in der klassischen Geometrie als erster Fermat Punkt F des Dreiecks bekannt und er wird folgendermassen konstruiert: über jeder Dreiecksseite werden nach aussen gleichseitige Dreiecke ABC', BCA' und CAB' konstruiert. Dann schneiden sich AA', BB' und CC' in einem Punkt, nämlich in F, wie die folgende Skizze verdeutlicht.



Beweise zu den aufgestellten Behauptungen finden sich in der Internetseite mit der Adresse *http://www.cut-the-knot.org/Generalisation/fermat point.shtml* und in den meisten Lehrbüchern zur Dreiecksgeometrie (eines davon ist in der Literaturliste am Ende des Artikels angeführt).

Kleine Unternehmen wollen expandieren, daher interessiert uns natürlich, was es für die Standortsuche für das Zentrallager ändert, wenn eine vierte Filiale hinzukommt. Nun haben wir es also mit einem Viereck $ABCD$ zu tun und wieder ist ein Punkt P gesucht, für den $\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}+\overline{PD}$ kleinstmöglich ist. Auch hier unterscheiden wir zwei Fälle, je nachdem, ob $ABCD$ ein konvexes Viereck ist, oder nicht. Der erste Fall ist ganz leicht: bezeichnet E den Schnittpunkt der Diagonalen AC und BD, so gilt für jeden Punkt X im Viereck:

$$\overline{AX}+\overline{XC}\geq\overline{AC}$$

mit Gleichheit genau dann, wenn X auf der Diagonale AC liegt und analog

$$\overline{BX} + \overline{XD} \geq \overline{BD}$$

mit Gleichheit genau dann, wenn X auf der Diagonale BD liegt. Es folgt also

$$\overline{XA} + \overline{XB} + \overline{XC} + \overline{XD} \geq \overline{AC} + \overline{BD}$$

und nur die Wahl $X = E$ liefert Gleichheit und somit den minimalen Wert für S.

Etwas aufwändiger ist der Fall eines nicht konvexen Vierecks. Dabei stellt sich heraus, dass für P derjenige der Eckpunkte zu wählen ist, der in der konvexen Hülle der drei anderen liegt. Der Beweis dafür sei hier ausgespart um einen weiteren Spezialfall zu untersuchen, der nicht unerhebliche Relevanz im Alltag besitzt.

Wir nehmen zuguterletzt an, unsere Supermarktkette habe mehr als die Hälfte ihrer Filialen in Wien, wobei wir die anfallenden Transportwege innerhalb der Stadt vernachlässigen wollen. Die sich ergebende Frage liegt auf der Hand: soll das Zentrallager dann auch in Wien errichtet werden, um die Summe der Wegstrecken zu den Filialen zu minimieren? Die Antwort darauf ergibt folgende Überlegung, die die Idee des Paarens von Filialen wieder aufgreift, wobei nunmehr für die Weglängenabschätzung jeweils eine Wiener Filiale mit einer Filiale ausserhalb Wiens zusammengefasst wird, bis nur mehr Wiener Filialen einzeln übrig sind.

Es seien wieder $n = k + l$ Punkte $P_1, \ldots, P_n$ in der Ebene gegeben mit $P_1 = P_2 = \ldots = P_k$ und $k \geq l$. Wir bilden nun die Paare $(P_1, P_{k+1}), \ldots, (P_l, P_{k+l})$, wobei $P_{l+1}, \ldots, P_k$, die alle mit P_1 zusammenfallen, übrig bleiben. Wir bemerken zunächst, dass für jeden Punkt X und alle i mit $1 \leq i \leq l$ der Ebene stets

$$\overline{P_iX} + \overline{XP_{k+i}} \geq \overline{P_iP_{k+i}}$$

gilt, wobei der Gleichheitsfall genau dann auftritt, wenn X im Segment P_iP_{k+i} liegt. Demnach gilt für die Summe S der Distanzen von X zu den n Punkten $P_1, \ldots, P_n$

$$S \geq \sum_{i=1}^{l} \overline{P_iP_{k+i}} + \overline{XP_{l+1}} + \ldots + \overline{XP_k} = \sum_{i=1}^{l} \overline{P_iP_{k+i}} + (k-l)\overline{XP_1}$$

und der Gleichheitsfall tritt genau dann ein, wenn $X = P_1$ gilt, zumal $P_1 (= P_2 = \ldots = P_k)$ in allen Segmenten P_iP_{k+i} liegt.

Somit ist es für eine Supermarktkette, die die Mehrzahl ihrer Filialen in einem Ort betreibt, tatsächlich am günstigsten, ebendort ihr Zentrallager zu errichten, wenn man Wege innerorts vernachlässigt.

Leonhard Summerer

LITERATUR

Ross Honsberger, *Gitter, Reste, Würfel.* Vieweg Verlag
Eric W. Weisstein, *First Fermat Point.* *http://mathworld.wolfram.com/FirstFermatPoint.html*
Hans Schupp, *Elementargeometrie.* Schöningh, Paderborn 1977