



MATHEMATIK MIT HUMOR – TEIL 2

Im Anschluss an den MatheBrief Nr. 85 sollen weitere drei Anwendungsaufgaben der Mathematik mit ein wenig Humor nähergebracht werden. Wieder stammen die Illustrationen vom Zeichner Markus Roskar (Universität für angewandte Kunst Wien).

Wollen Sie nicht Ihre Wahl ändern?

Sie stehen in einer Spiel-Show knapp davor, den Hauptpreis (einen Sportwagen) zu kassieren: Nur noch ein kleines Problem ist zu lösen: Drei Türen befinden sich in der Wand vor Ihnen, und nur hinter einer wartet der Flitzer. Hinter den beiden anderen sind nur Trostpreise, also z.B. – wie in der Show “Let’s make a deal” von Monty Hall – Ziegen. Sie geben also ihren Tipp ab, aber anstatt dass der Moderator (er weiß ja, wo das Gefährt steht) „Ihre Tür“ öffnet, macht er demonstrativ eine der beiden anderen Türen auf – mit einer der beiden Ziegen dahinter. Sie freuen sich, denn jetzt scheint Ihre Chance auf 50 : 50 gestiegen zu sein (die andere Ziege oder der Porsche). Doch der Moderator fragt penetrant, ob Sie nicht noch schnell Ihre Meinung ändern und die andere noch nicht geöffnete Tür wählen wollen. Der Mann will Sie doch nur von Ihrem Gewinn abbringen!?



Wenn’s um so viel geht, lohnt es sich, die Sache genau zu analysieren. Im Internet ist das „Ziegenproblem“ immer noch Stoff für heiße Diskussionen. Das Thema ist in anderer Form als ‚Smarties-Spiel‘ bereits im Mathe-Brief 29 behandelt worden.

Folgender Gedankengang führt zum richtigen Ergebnis:

Ich wähle zunächst willkürlich eine der drei Türen. Habe ich auf den Sportwagen getippt, ist das gut. Habe ich auf einen der beiden Trostpreise getippt, nicht. Die Wahrscheinlichkeit, den Haupttreffer abzusahnen, ist 1 : 3. Bleibe ich konsequent bei meiner Wahl, dann ändert sich auch nichts an der Wahrscheinlichkeit. Auch nicht, wenn mir der Moderator großartig eine der beiden Ziegen zeigt: das ist nämlich in jedem Fall möglich – ob ich nun das Auto oder eine der beiden Ziegen erwischte habe.

Nun zur Strategie, die Wahl „auf jeden Fall“ zu ändern. Hier gibt es drei Fälle: Wenn ich beim ersten Tippen den Sportwagen erwischte habe, ist das jetzt schlecht für mich. Wenn ich aber Ziege 1 oder Ziege 2 gewählt habe, zeige ich nach meiner Änderung *in beiden Fällen* auf das Objekt meiner Begierde.

Schlagartig habe ich also die doppelte Chance, zu gewinnen! So gesehen war die Information des Moderators für mich eine Hilfe und keine Verunsicherung. Der konsequente Wechsel auf die verbleibende Tür ist die deutlich bessere Wahl!

Wenn Sie das Problem in einer kleinen Runde diskutieren, werden Sie alle möglichen widersprüchlichen Argumentationen zu hören bekommen. Aber Sie haben ein Hütchenspiel (drei Hütchen und ein Bonbon wie im Smarties-Spiel) vorbereitet und spielen mit einer Versuchsperson das Ratespiel zwanzig Mal *ohne* und zwanzig Mal *mit* Meinungsänderung. Die Leute werden staunen, wie deutlich man sieht, dass das Umschwenken besser ist!

Der richtige Ansatz spart viel Rechenarbeit

Bei so mancher nützlicher Rechnung zahlt es sich aus, den Hausverstand einzusetzen. Mit ein bisschen Kopfrechnen kommt man dann oft erstaunlich schnell zum Ziel.



Beispiel 1: Zwei Jogger A und B laufen ein klassisches Langstreckentempo von 3,5 m/s (das ergibt eine Zeit von etwas unter fünf Minuten pro Kilometer). Läufer A will dann doch wieder nach Hause zurücklaufen, während der ehrgeizige Läufer B noch ein Ziel in 300 Meter Entfernung ansteuert, um dann auch umzukehren. Es ist B klar, dass er, wenn er A wieder einholen will, ab dem Zeitpunkt der Trennung schneller laufen muss, also läuft er ein doch relativ forsches Tempo von 4 m/s (und braucht dadurch nur mehr 250 Sekunden, also gut vier Minuten, für einen Kilometer). „Wir sehen uns gleich wieder“, sind seine optimistischen Abschiedsworte. Wann aber ist „gleich“?

Man kann das Beispiel kompliziert angehen, aber mit dem richtigen Ansatz ist die Rechnung ein „Einzeiler“: B ist ab dem Zeitpunkt der Trennung von A 600 Meter hinter A. Um diese 600 Meter einzuholen, holt er jede Sekunde 1/2 m auf und braucht zum Wettmachen der zusätzlichen zweimal 300 Meter somit 1 200 Sekunden. „Gleich“ bedeutet im konkreten Fall also 20 Minuten!

Beispiel 2: Wie lange dauert ein Überholvorgang, wenn das langsamere Auto 90 km/h und das schnellere 108 km/h fährt, und wieviele Meter benötigt der Vorgang?

Der Geschwindigkeitsunterschied ist 18 km/h, also 5 m/s (Division durch 3,6, weil eigentlich Multiplikation mit 1000 und anschließende Division durch 3600). Autos sind durchschnittlich knapp 5 m lang, 15 m vorher sollte man ausscheren und 15 m nachher darf man wieder auf die richtige Spur. Macht 35 m, die man überwinden muss. Dafür braucht man sieben Sekunden. In dieser Zeit fährt das schnellere Auto (30 m/s) 210 m.

Beispiel 3: Die wievielfache (negative) Erdbeschleunigung muss man aushalten, wenn man vom 10-Meter-Brett ins Wasser springt?

Man ist 10 m lang 1 g ausgesetzt und taucht bei einem sauberen Kopfsprung maximal 4 m ein, muss also 2,5 mal schneller verzögern ($-2,5 g$). Die Acapulco-Springer haben nur eine Wassertiefe von 3,6 m zum blitzschnellen Abrollen, bei etwa 26 m Sprunghöhe. Das sind dann schon $-7 g$.¹

¹ Wenn man zuerst mit konstanter Beschleunigung fällt und dann mit konstanter negativer Beschleunigung abbremst, hat man an der Schnittstelle dieselbe Geschwindigkeit. Hier muss man allerdings zumindest *einmal* verifizieren, dass bei einem k -tel des Weges mit k -facher konstanter Beschleunigung dieselbe Endgeschwindigkeit v herauskommt:

Zur Verfügung stehen die Formeln $v = gt$ und $t = \sqrt{\frac{2s}{g}}$ (wegen $s = \frac{g}{2}t^2$). Mit $v_1 = v_2$ haben wir dann $g_1 \sqrt{\frac{2s_1}{g_1}} = g_2 \sqrt{\frac{2s_2}{g_2}}$, woraus bereits $s_1 g_1 = s_2 g_2$ bzw. $s_1 : s_2 = g_2 : g_1$ folgt.

Nach zwanzig Metern freiem Fall nur 0,7 m Knautschzone zur Verfügung zu haben (–28 g), ist das selbe wie mit einem Fahrzeug mit 72 km/h gegen eine Mauer zu fahren. Da nützt auch Anschnallen nichts mehr. Manche Insektenflügel müssen bis zu 300 g aushalten. Andererseits enthalten sie keine wichtigen Organe.

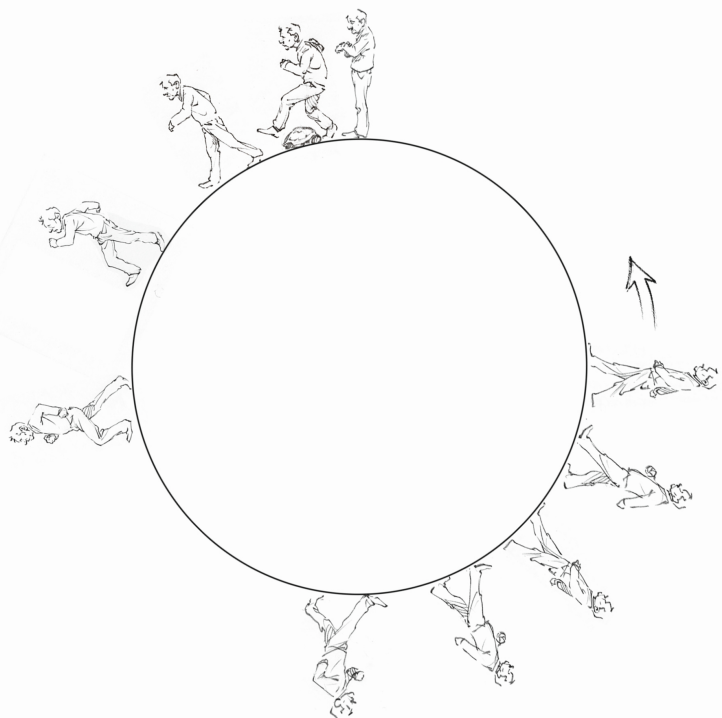
Vermeidbarer Unsinn

Klassische Situation auf der Autobahn: Eine Kolonne von 5 Autos will mit 130 Sachen an zwei Lastwägen, die 100 km/h fahren, vorbei. Der hintere Lastwagenfahrer hat schon ein paar Sekunden nicht in den Rückspiegel geschaut und glaubt, den Bummel vor ihm überholen zu müssen. Das erste Auto reduziert nach einer halben Schrecksekunde die Geschwindigkeit. Es ist aber eben diese halbe Sekunde zu lange zu schnell gefahren, und jetzt muss es schon deutlich unter 100 abbremsen, damit sich die Sache noch ausgeht; sagen wir auf 90 km/h. Der Flitzer dahinter sieht die Bremslichter des Vordermanns aufleuchten und tritt nach einer weiteren halben Schrecksekunde auf die Bremse. Weil er aber während der Reaktionszeit seines Vordermanns und zusätzlich seiner Reaktionszeit 130 gefahren ist, muss er jetzt schon auf sagen wir 80 runter. Sie wissen schon, was der dritte Lenker machen muss (70), und dann erst der vierte (60) und der fünfte (50) ...

Wenn alles glimpflich abgelaufen ist und der Lastwagen endlich überholt hat, fluchen alle ein wenig auf den „blöden Lastler“ und das Spiel geht von vorne los. Jetzt ist *viel* Platz vor dem ersten Lenker, er beschleunigt wieder auf 130. Der hinter ihm musste ja mehr abbremsen, will aber gleich wieder aufschließen, beschleunigt somit schon mehr. Der dritte Fahrer will sich nicht lumpen lassen und lässt seine PS spielen, um endlich wieder 130 fahren zu können, der vierte Motor röhrt geradezu lustvoll, und der fünfte Fahrer testet, ob sein Bolide wirklich von 50 auf 130 in 10 Sekunden beschleunigen kann ...

Was lernen wir aus dem alltäglichen Spielchen? Hätten die fünf langsamer fahren sollen? Nein, das war schon ok (es war ja erlaubt, so schnell zu fahren). Es war nicht die Geschwindigkeit, es war *der zu geringe Abstand* zwischen den Fahrzeugen – auch wenn der natürlich von der Geschwindigkeit abhängt. Bei mehr Abstand ist das Auffahren nicht so tragisch, und man muss nicht zusätzlich mit der Geschwindigkeit runter.

Deshalb funktioniert der Ziehharmonika-Effekt auch in der Marschkolonne im Schrittempo: Wenn eine Gruppe von Personen sich in zu engem Abstand durch schwierigeres Gelände kämpft, kommt die vorderste Person halbwegs gleichmäßig voran, während die hinteren ständig kurz stehenbleiben und dann nachhasten müssen. Lösung des Problems: Mehr Abstand lassen!



Georg Glaeser