Österreichische Mathematische Gesellschaft

MATHE-BRIEF

September 2018 — Nr. 91

Herausgegeben von der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft
http://www.oemg.ac.at/Mathe–Brief ——— mathe–brief@oemg.ac.at

Divergente Reihen

Ein guter Teil der Mathematik besteht aus dem (gelegentlich mühsamen) Nachweis der Konvergenz von Reihen, die sich dem Mathematiker herausfordernd entgegenstellen. Wieviel einfacher wäre es doch, wenn man sich über ihre Konvergenz keine Gedanken machen müsste!

Allerdings kann man dann zu erstaunlichen Ergebnissen kommen. Der indische Mathematiker Srinivasa RAMANUJAN (1887–1920) erwähnt in einem Brief (vgl. [2, S. 351]) an den englischen Mathematiker Godfrey Harold HARDY (1877–1947) die Gleichung

$$1+2+3+4+5+6+7+8+\cdots = -\frac{1}{12}. \tag{1}$$

Wie könnte man denn darauf kommen? Tun wir einmal verbotenerweise so, als könnte man mit divergenten Reihen rechnen wie mit konvergenten Reihen, also mit Zahlen. Z.B. stellen wir uns vor, die folgende Reihe a wäre durch ein Zahl gegeben:

$$a = 1-1+1-1\ \pm\cdots$$

Dann ist offenbar

$$a = 1-(1-1+1-1\ \pm\cdots) = 1-a,$$

also $2a = 1$ und $a = \frac{1}{2}$. Das schaut noch nicht so unvernünftig aus, weil das der Mittelwert der zwischen 1 und 0 oszillierenden Partialsummen der Reihe ist. Mulmiger wird es bereits bei der Argumentation

$$\begin{aligned} b &= 1-2+3-4+5-6+7\ \mp\cdots \\ &= \qquad 1-2+3-4+5-6\ \pm\cdots \\ b+b = 2b &= 1-1+1-1\ \pm\cdots = a \\ b &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Das n-te Glied b_n dieser Reihe hat die Form $b_n = (-1)^{n-1}n$. Die Partialsummen $s_k = \sum_{n=1}^{k} b_n$ der Reihe b nehmen der Reihe nach die Werte $1,-1,2,-2,3,-3,4,-4,\cdots$ an, d.h. $s_{2n-1} = n$ und $s_{2n} = -n$. Die Mittelwerte $m_l = \frac{1}{l}\sum_{k=1}^{l} s_k$ dieser Partialsummen oszillieren zwischen $\frac{n}{2n-1}$ (für $l = 2n-1$) und 0 (für $l = 2n$). Im Sinne einer Mittelbildung der Partialsummen für $l \to \infty$ ist also der Wert $\frac{1}{4}$ für b noch halbwegs annehmbar.

Jetzt aber kommt es dick: die Reihe $c = \sum_{n=1}^{\infty} n$ erfüllt die Gleichungen

$$\begin{array}{rcl} c & = & 1 \quad + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + \quad \cdots \\ 4c & = & \quad\quad 4 \quad + \quad 8 \quad + \quad 12 \quad + \quad 16 + \quad \cdots \\ c - 4c & = & 1 \quad - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8 \pm \cdots = b \\ -3c & = & \frac{1}{4} \\ c & = & -\frac{1}{12}\,. \end{array}$$

Tatsächlich sind wir also bei (1) gelandet.

Es ist gar nicht so abwegig, sich vorzustellen, dass man bei fortschreitender Summation, über ∞ rechts im Unendlichen hinaus, links aus dem Unendlichen wieder in den Bereich der negativen Zahlen kommt, und bei der Funktion $\frac{1}{x}$ erlebt man Ähnliches, wenn x nach links über den Nullpunkt hinweg wandert.

Die Geschichte ist aber noch nicht zu Ende, sondern hat eine überraschende Pointe. Die Funktion

$$f(s) := 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \tag{2}$$

ist zunächst definiert für reelle Parameter $s > 1$, weil in diesem Fall die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ konvergiert. Für $s \leq 1$ divergiert sie. Formal steht dann da z.B.

$$f(-1) = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} n. \tag{3}$$

Die Reihe (2) konvergiert auch für komplexe Argumente s mit Realteil > 1; andernfalls divergiert sie. Die durch (2) auf der komplexen Halbebene $\{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(s) > 1\}$ gegebene Funktion kann man aber auf eindeutige Weise zu einer auf ganz $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ definierten komplex differenzierbaren Funktion ζ *analytisch fortsetzen*, die nur im Punkt 1 eine Unendlichkeitsstelle, besitzt. Diese Funktion heißt RIEMANN*sche Zetafunktion*. Ihr Wert an der Stelle -1 ist – wer hätte sich das gedacht -

$$\zeta(-1) = -\frac{1}{12}. \tag{4}$$

Sehr neugierige und mathematisch hartgesottene Leserinnen und Leser können das in [3, S. 212] oder [1, S. 77] nachlesen. Vielleicht hat die Kombination von (2), (3) und (4) RAMANUJAN veranlasst, das gewissermaßen zur mathematische Belustigung in der Form (1) zu notieren. Sie diente seinen Überlegungen zur sogenannten „Konstanten einer Reihe“, die erst später von HARDY in mathematisch exakte Form gegossen wurde.

Man kann z.B. nachdenken, was man mit Reihen anfangen kann, von denen man nur weiß, dass die Mittelwerte ihrer Partialsummen konvergieren (das trifft für konvergente Reihen und die Reihe a zu). Wenn man Resultate, die wie (1) aussehen, vermeiden will, ist es aber jedenfalls sicherer, sich davon zu überzeugen, dass eine Reihe, mit der man rechnen will, konvergiert.

Gilbert Helmberg

LITERATUR

[1] HELMBERG G. *Analytische Zahlentheorie. Rund um den Primzahlsatz.* Berlin: deGruyter 2018.

[2] RAMANUJAN S. *Collected Papers*. New York: Chelsea 1962.

[3] STOPPLE, J. *A primer of analytic number theory.* New York: Cambridge University Press 2003.