Österreichische Mathematische Gesellschaft

**MATHE-BRIEF**

**Juni 2018 — Nr. 90**

Herausgegeben von der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft
http://www.oemg.ac.at/Mathe–Brief ——— mathe–brief@oemg.ac.at

# Wie kommt man auf Quaternionen?

Wenn man im Unterricht den Körper der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ als Menge der Paare $(a,b) = a+bi$ (mit reellen Zahlen $a$, $b$) einführt, könnte doch jemand fragen, ob es denn so weitergehen könnte, also ob es einen Körper $\mathbb{K}$ gibt, der aus Tripeln $(a,b,c) = a+bi+cj$ (mit reellen Zahlen $a$, $b$, $c$) besteht! Die Antwort ist: Leider nein!

In diesem Körper $\mathbb{K}$ müsste das Produkt $k = ij$ enthalten sein. Dann wäre

$$k = ij = r + si + tj,$$

also einerseits

$$ik = i(ij) = i^2 j = -j,$$

aber auch

$$ik = ri + si^2 + tij = ri - s + tk = -s + rt + (st+r)i + t^2 j.$$

Dann wäre aber $t^2 = -1$. Da aber $t$ eine reelle Zahl ist, ist dies nicht möglich. Wenn man aber darauf verzichtet, dass $k = ij$ im Körper $\mathbb{K}$ liegt, so kann man versuchen, mit Quadrupeln $\alpha = a+bi+cj+dk$ zu arbeiten. William Rowan Hamilton (1805–1865) hatte die Idee, nun die Regeln

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

einzuführen, und gezeigt, dass man mit diesen Quadrupeln, die er *Quaternionen* (nach lat. *quaterni* „je vier") nannte, fast wie mit komplexen Zahlen rechnen kann. Man hat allerdings das Kommutativgesetz verloren, denn es gilt

$$ij = k = -ji,\ jk = i = -kj,\ ki = j = -ik.$$

Diese Idee soll ihm in den Sinn gekommen sein, als er über eine Brücke zu einer Sitzung der Royal Irish Academy eilte. Bezeichnet man mit $N(\alpha) = a^2+b^2+c^2+d^2$ die *Norm* eines Quaternions, so rechnet man nach, dass die Gleichung $N(\alpha_1\alpha_2) = N(\alpha_1)N(\alpha_2)$ gilt. Dies verallgemeinert die von den komplexen Zahlen bekannte Gleichung

$$(a_1^2+b_1^2)(a_2^2+b_2^2) = (a_1a_2 - b_1b_2)^2 + (a_2b_1 + b_2a_1)^2.$$

Als Gleichung über das Produkt von Summen aus vier Quadraten, war diese etwas kompliziert aussehende Formel schon Leonhard Euler (1707–1783) bekannt.

Eine kleine Überrraschung soll noch vermerkt werden. Die Gleichung

$$X^2 = -1$$

hat unendlich viele Lösungen in $\mathbb{H}$, der Menge der Quaternionen. Man findet etwa $X = \frac{1}{3}i + \frac{2}{3}j + \frac{2}{3}k$ oder $X = \frac{3}{5}i + \frac{4}{5}j$. Da kann man leicht entdecken, dass jedes Pythagoreische Tripel $(x,y,z)$, also ganze Zahlen mit $x^2+y^2 = z^2$, eine Lösung $X = \frac{x}{z}i + \frac{y}{z}j$ liefert.

Nun könnte man doch fragen, wieso Polynome $p(z) = z^2 + \alpha z + \beta$ zweiten Grades über dem Körper $\mathbb{C}$ höchstens zwei Nullstellen haben, und woran es liegt, dass das bei Quaternionen plötzlich anders ist. Sei $\zeta$ eine Nullstelle des quadratischen Polynoms, so dividiert man das Polynom durch das lineare Polynom $z - \zeta$ und es verbleibt ein lineares Polynom $z - \eta$. Es gilt dann $z^2 + \alpha z + \beta = (z - \zeta)(z - \eta)$. Dies scheitert aber bei Quaternionen! Sei $p(Z) = Z^2 + \alpha Z + \beta$ ein Polynom über $\mathbb{H}$ mit zwei Nullstellen $\zeta$ und $\eta$. Dann ist aber das Produkt

$$(Z - \zeta)(Z - \eta) = Z^2 - \zeta Z - Z\eta + \zeta\eta$$

in der Regel nicht $Z^2 + \alpha Z + \beta$. Da die Multiplikation der Quaternionen nicht kommutativ sein muss, kann man nicht erwarten, dass die Gleichung

$$-\zeta Z - Z\eta = \alpha Z$$

gilt.

Fritz Schweiger

Allen Kolleginnen und Kollegen wünschen wir erholsame Ferien. Im September melden wir uns wieder mit Mathe-Brief 91.

Die Redaktion