Österreichische
Mathematische
Gesellschaft

MATHE-BRIEF

Mai 2018 — Nr. 89

Herausgegeben von der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft
http: // www.oemg.ac.at / Mathe–Brief ——— mathe–brief@oemg.ac.at

Die Eulersche Zahl

Keine Sorge, wir werden uns im Weiteren nicht mit dem Auftreten der Zahl e bei und in den Lösungen von Differentialgleichungen der Art $y' = Cy$, $y'' = ay' + by$ oder dergleichen mehr beschäftigen, sondern uns auf einen kleinen und hoffentlich nicht allzu beschwerlichen Rundgang durch die Vielzahl algebraischer Eigenschaften der Eulerschen Zahl begeben.

Dabei zeigt sich insbesondere sehr schnell, dass die im Zusammenhang mit der Beschreibung diverser Wachstumsvorgänge sehr nützliche Darstellung

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

zu unmittelbar wenig Brauchbarem führt, wenn man beispielsweise die Frage beantworten will, ob

$$e = 2.718281828459045235360287471352662497757247093699959574966 96\ldots$$

rational oder irrational ist. Leonhard Euler konnte die Antwort auf diese Frage nicht finden, obwohl ihm die Reihendarstellung

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \ldots$$

bekannt war. Wir werden gleich sehen, dass sie der Schlüssel für den Beweis folgender Behauptung ist:

Die Zahl e ist irrational.

Nehmen wir an, die Zahl e wäre rational, d.h. e könnte in der Form $e = a/b$ mit positiven ganzen Zahlen a und b dargestellt werden. Dann ergäbe sich $b! \cdot e = b! \cdot a/b$, also

$$a \cdot (b-1)! = b! \cdot \Big(\sum_{j=0}^{b} \frac{1}{j!} + \sum_{j=b+1}^{\infty} \frac{1}{j!} \Big), \quad \text{d.h.}$$

$$a \cdot (b-1)! = \Big(b! + \frac{b!}{1!} + \frac{b!}{2!} + \cdots + \frac{b!}{b!} \Big) + R.$$

Weil in dieser Identität links eine ganze Zahl steht und der rechtsseitige Klammerterm ganzzahlig ist, muss auch der positive Summand R ganzzahlig sein. Es ist aber

$$\begin{aligned} R &= b! \cdot \Big(\frac{1}{(b+1)!} + \frac{1}{(b+2)!} + \frac{1}{(b+3)!} + \cdots\Big) \\ &= \frac{1}{b+1} + \frac{1}{(b+1)(b+2)} + \frac{1}{(b+1)(b+2)(b+3)} + \cdots \\ &< \frac{1}{b+1} + \frac{1}{(b+1)^2} + \frac{1}{(b+1)^3} + \cdots = \Big(\frac{1}{b+1}\Big) \Big/ \Big(1 - \frac{1}{b+1}\Big) = \frac{1}{b} \leq 1. \end{aligned}$$

Damit müsste die ganze Zahl R zwischen 0 und 1 liegen, was natürlich nicht möglich ist. $\square$

Der erste Beweis der Irrationalität von e (und auch von π) gelang Johann Heinrich Lambert im 18. Jahrhundert. Als unmittelbare Folgerung erhält man, dass auch alle Zahlen der Form $e^{1/n}$, $n = 2, 3, 4, \ldots$, irrational sind.

Wie verhält es sich aber mit ganzzahligen Potenzen von e, etwa mit e^2? Wir zeigen nun die Gültigkeit folgender Aussage:

Auch die Zahl e^2 ist irrational.

Für den Beweis werden wir ähnlich wie vorher vorgehen und nehmen wieder an, es gälte $e^2 = a/b$ mit natürlichen Zahlen a und b, $a > b \geq 2$. Dann hätten wir $b \cdot e = a \cdot e^{-1}$, also

$$b \cdot \Big(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots\Big) = a \cdot \Big(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!} + \cdots\Big).$$

Wenn man diese Gleichung mit $n!$ multipliziert, wobei $n \geq 1$ eine beliebige natürliche Zahl ist, ergibt sich

$$b \cdot \Big(A_n + \frac{n!}{(n+1)!} + \frac{n!}{(n+2)!} + \ldots\Big) = a \cdot \Big(B_n + (-1)^{n+1}\Big(\frac{n!}{(n+1)!} - \frac{n!}{(n+2)!} \pm \cdots\Big)\Big),$$

wobei A_n und B_n ganze Zahlen sind. Also haben wir

$$\begin{aligned} & bA_n + b\Big(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \cdots\Big) \\ &= aB_n + (-1)^{n+1} a\Big(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \pm \cdots\Big), \quad \text{d.h.} \\ & aB_n - bA_n = b\Big(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots\Big) + (-1)^n a\Big(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \pm \cdots\Big). \end{aligned}$$

Daraus erhalten wir mit Hilfe der Dreiecksungleichung

$$|aB_n - bA_n| \leq b\Big(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots\Big) + a\Big(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots\Big).$$

Weil sich analog zur obigen Abschätzung von R die Ungleichung

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots < \frac{1}{n}$$

ergibt, folgt

$$|aB_n - bA_n| < \frac{a+b}{n}.$$

Deshalb gilt für alle $n > a+b$, dass $|aB_n - bA_n| < 1$ ist. Weil aber $aB_n - bA_n$ eine ganze Zahl ist, müsste $aB_n = bA_n$, also

$$a \cdot \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{j!} = b \cdot \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!}$$

für alle $n > a+b$ erfüllt sein. Dies ist aber nicht möglich, weil beim Übergang von einem geraden n zu einem ungeraden $n+1$ der Ausdruck auf der rechten Seite wächst, der Ausdruck auf der linken Seite aber fällt! □

Wir können das bisher Bewiesene folgendermaßen zusammenfassen: *Es gibt keine Polynome der Art $P(x) = ax+b$ bzw. $P(x) = ax^2+b$ mit ganzzahligen Koeffizienten a und b, $a \neq 0$, die die Eulersche Zahl e als Nullstelle haben.*

Damit stellt sich folgende Frage fast von selbst: Gibt es ein quadratisches Polynom $P \in \mathbb{Z}[x]$, das die Zahl e als Nullstelle besitzt?

Mit Überlegungen, deren Grundidee aus den Beweisen der Irrationalität von e und e^2 stammt, lässt sich nachweisen, dass die Antwort auf unsere Frage „nein“ lautet [(1)]. Es gilt nämlich der

Satz von Liouville[(2)] *Weder e noch e^2 sind Nullstellen eines quadratischen Polynoms $P \in \mathbb{Z}[x]$, mit anderen Worten, sowohl e als auch e^2 sind nichtquadratisch irrational.*

Deshalb lassen sich diese zwei Zahlen nicht in der Form $\frac{u \pm \sqrt{v}}{w}$ mit ganzen Zahlen u, v und w darstellen.[(3)]

Während unseres weiteren Rundgangs werden wir keinem der durchwegs tiefsinnigen und großteils umfangreichen Beweise mehr begegnen – ich muss auf die Literatur verweisen.

Nachdem Liouville die nichtquadratische Irrationalität von e und e^2 bewiesen hatte, stand die Frage im Raum, ob es überhaupt ein Polynom $P \in \mathbb{Z}[x]$ vom Grad $n \geq 3$ geben kann, das e als Nullstelle besitzt, mit anderen Worten, die Frage, ob die Eulersche Zahl algebraisch oder transzendent ist.

Beweisversuche für den Fall $n = 3$ verliefen nicht sehr ermutigend, und es zeigte sich bald, dass nur grundsätzlich neuartige Ideen, Konzepte und Methoden zur Lösung führen konnten. Der „Durchbruch“ gelang schließlich Charles Hermite, einem bedeutenden Schüler Liouvilles. Er bewies auf „mysteriösem Weg“ [(4)] den bemerkenswerten

Satz: *Für jede rationale Zahl r ist die Zahl e^r transzendent.*

Man könnte meinen, die Geschichte sei nun zu Ende – mitnichten! Ferdinand Lindemann, dem es als Erstem gelang, die Transzendenz der Kreiszahl π nachzuweisen, formulierte folgende weitreichende

Vermutung: *Es seien $n \geq 1$ eine natürliche und $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ paarweise verschiedene algebraische Zahlen. Dann gilt die Gleichung*

$$a_1 e^{\alpha_1} + a_2 e^{\alpha_2} + \cdots + a_n e^{\alpha_n} = 0$$

[(1)] Man formt dafür die angenommene Gleichung $ae^2 + be + c = 0$ mit ganzen Zahlen a, b und c auf $ae + b + ce^{-1} = 0$ um und leitet einen Widerspruch her.

[(2)] Joseph Liouville, 1809–1882

[(3)] Daraus ergibt sich nach wichtigen Sätzen von Euler und Joseph Louis Lagrange, dass weder e noch e^2 als periodische regelmäßige Kettenbrüche darstellbar sind.

[(4)] Dies ist ein wörtliches Zitat seines bedeutendsten Schülers Henri Poincaré.

genau dann, wenn $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$.

Er konnte sie für bestimmte Fälle nachweisen. Der Beweis der allgemeinen Aussage gelang schließlich Karl Weierstraß.(5) Ausgehend von Ideen George Pólyas lässt sich folgende sehr allgemeine Aussage beweisen:

Für komplexe Zahlen α, $\alpha \neq 0$, *sind* α *und* e^{α} *nicht beide algebraisch.*

Daraus ergibt sich beispielsweise für die nicht algebraische Zahl $\alpha = \pi$ als weitere Frage, welche Natur die Zahl e^{π} hat (6). Die Antwort darauf fand Alexander Ossipowitsch Gelfond. Er bewies einen allgemeinen Satz mit der Konsequenz:

Die Zahl e^{π} *ist transzendent.*(7)

Mit Verfeinerung der Methoden, die Gelfond verwendet hatte, und nach Vorarbeiten von Rodion Osijewitsch Kusmin und Carl Ludwig Siegel gelang es Gelfond und Theodor Schneider, innerhalb eines Jahres unabhängig voneinander das siebente Hilbertsche Problem zu lösen, das David Hilbert neben 22 anderen am legendären Mathematikerkongress im Jahr 1900 in Paris vorgetragen hatte. Die Aussage trägt seither den Namen *Satz von Gelfond-Schneider* und lautet:

Falls $\alpha \notin \{0,1\}$ *algebraisch ist und* β *algebraisch und irrational ist, so ist die Zahl* α^{β} *transzendent.*

Insbesondere ergeben $\alpha = a \in \mathbb{Q}$ und $\beta = \sqrt{b} \notin \mathbb{Q}$, dass $a^{\sqrt{b}}$ transzendent ist,(8) ein Tatsache, die bereits von Euler vermutet wurde, bevor es überhaupt noch eine exakte Definition des Begriffs der transzendenten Zahlen gab. Diesen kleinen Rundgang möchte ich mit einigen Fragen beenden, deren Beantwortung im Moment wohl hoffnungslos scheint:

- Welche der Zahlen e^e, e^{e^2}, π^e oder π^{π} sind transzendent?
- Sind $e+\pi$, $e \cdot \pi$ oder e/π rational, irrational oder transzendent?
- Welche Natur haben die „Fast-Eulerschen" Zahlen(9)

$$\operatorname{erd}(n) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!+n}, \quad n = 1,2,3,\ldots ?$$

Walther Janous

Literatur

[1] Julian HAVIL: *The Irrationals*, Princeton Univ. Press, Princeton and Oxford 2012.
[2] Oskar PERRON: *Irrationalzahlen*, Walter de Gruyter, Berlin 1939.
[3] Carl Ludwig SIEGEL: *Transzendente Zahlen*. Bibliograph. Inst., Mannheim 1967.
[4] Fridtjof TOENNIESSEN: *Das Geheimnis der transzendenten Zahlen*, Spektrum Akadem. Verlag, Heidelberg 2010.

(5)Deshalb heißt die ursprüngliche Vermutung nun *Satz von Lindemann und Weierstraß*. Als Korollar kann man mit Hilfe der „schönsten Formel der Mathematik" , nämlich $e^{i\pi} + 1 = 0$, elegant beweisen, dass $i\pi$ und damit auch π transzendent sein müssen.

(6)Man beachte, dass sich aus $e^{i\pi} = -1$ und $i \cdot (-i) = 1$ die Darstellung $e^{\pi} = (-1)^{-i}$ ergibt.

(7)Diese Zahl wird oft als Gelfondsche Konstante bezeichnet.

(8)Als schönes Beispiel sollte die (transzendente) Zahl $2^{\sqrt{2}}$, die sog. Konstante von Gelfond-Schneider, erwähnt werden.

(9)Paul Erdös hat die Frage für $n = 1$ gestellt.