



Herausgegeben von der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft
<http://www.oemg.ac.at/Mathe-Brief> ——— mathe-brief@oemg.ac.at

Kann man die rationalen Zahlen nummerieren ?

Sprechen wir voraus ab, dass wir es nur mit positiven Zahlen zu tun haben – es bräuchte nichts Neues, die negativen Zahlen dazuzunehmen.

Die rationalen Zahlen sind die Brüche zweier ganzer Zahlen. Während die natürlichen Zahlen 1, 2, 3... gemütlich aufeinander folgen, liegen schon die rationalen Zahlen im Intervall $[0, 1]$ dicht an dicht, fast möchte man sagen, wie der Sand am Meer. Trotzdem lernt man schon zu Beginn des Mathematikstudiums, dass ein einfacher Trick es erlaubt, jeder rationalen Zahl eine natürliche Zahl als „Nummer“ zuzuordnen (man sagt auch, die rationalen Zahlen seien „abzählbar“). Wer das zum ersten Mal sieht, stellt staunend fest, dass es offenbar genau so viele rationale Brüche gibt wie natürliche Zahlen.

Hier ist der Trick: wir schreiben alle Brüche auf ein nach rechts und unten unendlich großes Papier so, dass in der ersten Zeile alle Brüche mit dem Zähler 1 stehen, in der zweiten Zeile alle Brüche mit dem Zähler 2 usw.:

$$\begin{array}{ccccccccc} \frac{1}{1} & & \frac{1}{2} & & \frac{1}{3} & & \frac{1}{4} & & \frac{1}{5} & & \frac{1}{6} & \dots \\ & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \\ \frac{2}{1} & & \frac{2}{2} & & \frac{2}{3} & & \frac{2}{4} & & \frac{2}{5} & & \dots & \\ & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & & & \\ \frac{3}{1} & & \frac{3}{2} & & \frac{3}{3} & & \frac{3}{4} & & \dots & & & \\ & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & & & & & \\ \frac{4}{1} & & \frac{4}{2} & & \frac{4}{3} & & \dots & & & & & \\ & \swarrow & & \swarrow & & & & & & & & \\ \frac{5}{1} & & \frac{5}{2} & & \dots & & & & & & & \\ & \swarrow & & & & & & & & & & \\ \frac{6}{1} & & \dots & & & & & & & & & \end{array}$$

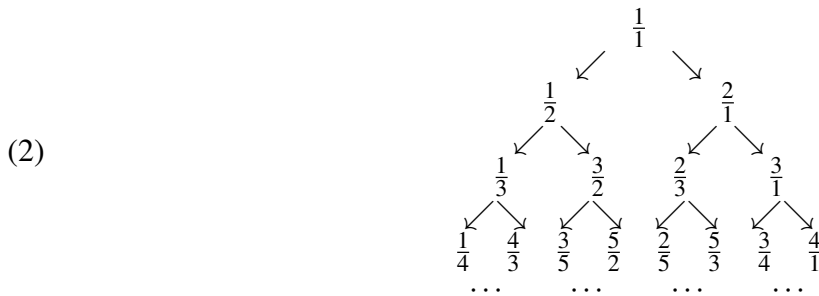
Wenn wir die durch die Pfeile angedeuteten Diagonalen in einer Zeile aneinanderfügen, bekommen wir alle Brüche in eine Folge, in der jeder Bruch, also auch die durch diesen Bruch dargestellte rationale Zahl, eine Nummer hat. Allerdings hat diese Folge einen Schönheitsfehler: Weil sie auch alle ungekürzten Brüche enthält, kommt jede rationale Zahl in dieser Folge sogar unendlich oft vor.

Im Jahr 2000 haben N. Calkin und Herbert Wilf in [3] eine Folge vorgestellt, in der jeder gekürzte Bruch genau einmal vorkommt. Ihr Konstruktionsprinzip ist: Von $\frac{1}{1}$ ausgehend hat jeder gekürzte

Bruch $\frac{r}{s}$ einen linken Nachfolger $\frac{r}{r+s}$ und einen rechten Nachfolger $\frac{r+s}{s}$:



Offenbar ist jeder linke Nachkomme kleiner als 1 und jeder rechte Nachkomme größer als 1. Vom Bruch $\frac{1}{1}$ ausgehend liefert dieses Konstruktionsprinzip folgendes Schema (in der Graphentheorie heißt so ein Schema ein „Baum“):



Wenn die Zeilen dieses Schemas aneinander gereiht werden, ergibt sich die Folge

(3)

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{1}, \frac{1}{4}, \frac{4}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{2}, \frac{2}{5}, \frac{5}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{1}, \dots$$

In dieser Folge bezeichnen wir, beginnend mit

$$a(0) = \frac{b(0)}{c(0)} = \frac{1}{1},$$

das $n + 1$ -te Glied mit $a(n) = \frac{b(n)}{c(n)}$. Sie hat überraschende und reizvolle Eigenschaften, die wir ohne Beweise anführen – an sich sind die Beweise unkompliziert und problemlos aus Kapitel 19 “Sets, functions, and the continuum hypothesis” in [1] oder in der deutschsprachigen Ausgabe [2] aus Kapitel 19 „Mengen, Funktionen und die Kontinuumshypothese“ zu entnehmen.

- (1) Jeder Bruch $a(n) = \frac{b(n)}{c(n)}$ ist bereits gekürzt.
- (2) Jeder gekürzte Bruch $\frac{r}{s}$ kommt in der Folge $\left\{ a(n) = \frac{b(n)}{c(n)} \right\}_{n=0}^{\infty}$ genau einmal vor.
- (3) Die Nenner genügen der Gleichung $c(n) = b(n+1)$, d.h. $a(n) = \frac{b(n)}{b(n+1)}$. Offenbar kommt es bei der Auflistung der Glieder $a(n) = \frac{b(n)}{b(n+1)}$ nur auf die Folge $\{b(n)\}_{n=0}^{\infty}$ an, die sogar schon lange Zeit vorher 1858 von A. Stern in [4] untersucht wurde.
- (4) Auch diese Folge ist leicht konstruierbar mit Hilfe der rekursiven Gleichungen

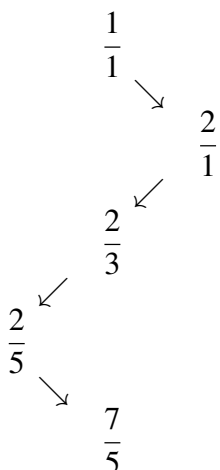
$$\begin{aligned} b(0) &= 1 \\ b(2n+1) &= b(n) \\ b(2n+2) &= b(n) + b(n+1) \end{aligned}$$

Das führt auf folgendes Konstruktionsverfahren:

	$b(2)$		$b(4)$		$b(6)$		$b(8)$		\dots											
	+		+		+		+		\dots											
	⏟		⏟		⏟		⏟		\dots											
	1		1		2		1		3											
$b(0)$		$b(1)$		$b(2)$		$b(3)$		$b(4)$		$b(5)$		$b(6)$		$b(7)$		$b(8)$		$b(9)$		\dots
$b(1)$		$b(3)$		$b(5)$		$b(7)$		$b(9)$		\dots										

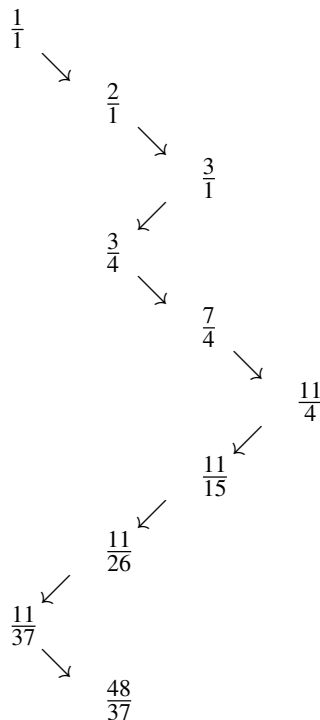
Zwei Fragen sind in diesem Zusammenhang naheliegend: Welche rationale Zahl steht in der Folge (3) an der m -ten Stelle ? An welcher Stelle in der Folge (3) steht ein gegebener Bruch?

Natürlich kann man beide Fragen beantworten, indem man die Glieder $a(n)$ einfach der Reihe nach inspiziert, aber es gibt eine elegantere Methode. Um die erste Frage zu beantworten, schreiben wir die Zahl m in ihrer binären Entwicklung. Beispielsweise ist $m = 25 = 16 + 8 + 1 = 2^4 + 2^3 + 2^0 = (11001)_2$. In unserem Schema (2) spazieren wir nun, vom ersten Bruch $1 = \frac{1}{1}$ ausgehend, für jede weitere binäre Ziffer 1 zum rechten Nachkommen, und für jede binäre Ziffer 0 zum linken Nachkommen.



Der letzte so erreichte Bruch $\frac{7}{5}$ ist der $m = 25$ -te in der Folge (3) (d.h. weil die Folge mit $a(0)$ beginnt, ist es der Bruch $a(m-1) = a(24)$).

Zur Beantwortung der zweiten Frage müssen wir umgekehrt vorgehen: wir suchen der Reihe nach die Vorgänger des gegebenen Bruches, z.B. $\frac{48}{37}$, auf und notieren jedesmal, wenn ein Bruch größer als 1 und deshalb rechter Nachkomme ist, die binäre Ziffer 1, und wenn ein Bruch kleiner als 1 und deshalb linker Nachkomme ist, die binäre Ziffer 0, bis wir beim Bruch $\frac{1}{1}$ angelangt sind, der noch eine Ziffer 1 beiträgt:



Das ergibt als Positionsnummer m des Bruches $\frac{48}{37}$ in der Folge (3) den Wert $m = (1110110001)_2 = 512 + 256 + 128 + 32 + 16 + 1 = 945$, d.h. $\frac{48}{37} = a(944)$.

Zum Schluß: Es gibt auch eine Formel, die für jede rationale Zahl x in der Folge (3) die nächste liefert:

$$x \mapsto f(x) = \frac{1}{[x] + 1 - \{x\}}$$

Dabei ist $[x]$ die größte in x enthaltene ganze Zahl, und $\{x\} = x - [x]$ der „Bruchteil“ von x . Beispielsweise folgt auf $\frac{48}{37}$ die rationale Zahl $\frac{1}{1+1-\frac{11}{37}} = \frac{37}{63}$.

Gilbert Helmbert

LITERATUR

- [1] MARTIN AIGNER, GÜNTER ZIEGLER: *Proofs from The Book*, Springer Verlag, Berlin Heidelberg 2014.
- [2] MARTIN AIGNER, GÜNTER ZIEGLER: *Das Buch der Beweise*, Springer Verlag, Berlin Heidelberg 2015.
- [3] N. CALKIN, HERBERT WILF: *Recounting the rationals*, Amer. Math. Monthly **107** (2000), 360-363.
- [4] M. ABRAHAM STERN: *Ueber eine zahlentheoretische Funktion*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **55** (1858), 193-220.