Österreichische Mathematische Gesellschaft

MATHE-BRIEF

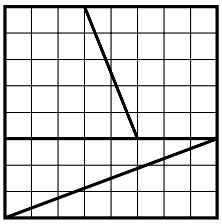
März 2018 — Nr. 87

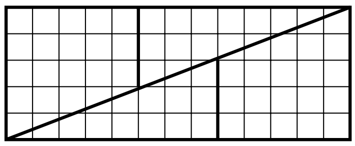
Herausgegeben von der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft
http: // www.oemg.ac.at / Mathe–Brief ——— mathe–brief@oemg.ac.at

99 = 100?

In der Februar-Ausgabe des letzten Jahres wurde im Mathebrief ein Beweis der arithmetischen Merkwürdigkeit $5 = 7$ diskutiert. Erwartungsgemäß stellte sich heraus, dass der Beweis einen Fehler enthielt. Es wurde in einem Beweisschritt durch Null geteilt. Tatsächlich handelt es sich nach dem derzeitigem Stand der Wissenschaft bei 5 und 7 um verschiedene Zahlen.

Wie sieht es mit 64 und 65 aus? Das folgende Puzzle, das vor mehr als hundert Jahren von Sam Loyd erfunden wurde, und das deshalb viele Leser wahrscheinlich schon kennen, scheint zu belegen, dass $64 = 65$ gilt: Die Figur links besteht aus $8 \cdot 8 = 64$ kleinen Kästchen, lässt sich aber offenbar so zerschneiden, dass sich die Einzelteile zu einer Figur zusammensetzen lassen, die aus $5 \cdot 13 = 65$ Kästchen besteht. Wer es nicht glaubt (und des Rätsels Lösung noch nicht kennt), möge bitte nachzählen.





Interessanter als die Erklärung des Phänomens ist eigentlich die Frage, wie das Rätsel konstruiert wurde. Es ist ja bemerkenswert, dass sich die beiden Fächen um genau eine Flächeneinheit unterscheiden und nicht etwa um eine krumme Bruchzahl. Zum Beispiel lässt sich ein Quadrat der Größe $49 = 7 \cdot 7$ nicht so schön zerlegen und anders wieder zusammensetzen.

Es scheint also etwas mit der Seitenlänge 8 des Quadrats auf sich zu haben. Die Seitenlängen des Rechtecks sind 5 und 13, und es ist verdächtig, dass 5, 8, 13 Fibonacci-Zahlen sind. Nicht nur das: auch die Koordinaten aller Punkte, an denen eine Schnittline beginnt oder endet, sind Fibonacci-Zahlen: $(0,3)$, $(3,8)$, $(5,3)$, $(3,8)$ im Quadrat und $(5,2)$, $(5,5)$, $(8,3)$, $(13,5)$ im Rechteck.

Fibonacci-Zahlen sind bekanntlich rekursiv definiert durch $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ und $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ $(n \in \mathbb{N})$. Es handelt sich wohl um die populärste Zahlenfolge in der Amateurmathematik, auch wenn diese Popularität aus Sicht der professionellen Mathematik nicht ganz nachvollziehbar ist. Wie dem auch sei. Das Rätsel scheint jedenfalls auf einer Eigenschaft dieser Zahlen zu beruhen.

In der Tat ist der Schüssel ist die sogenannte Cassini-Identität, die besagt, dass $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Dass diese Identität stimmt, lässt sich mühelos mit einem Induktionsbeweis aus der Rekurrenz $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ herleiten. Etwas eleganter geht es mit Matrizen: Aus der

Rekurrenz und den Anfangswerten erhält man die Gleichung

$$\begin{pmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n,$$

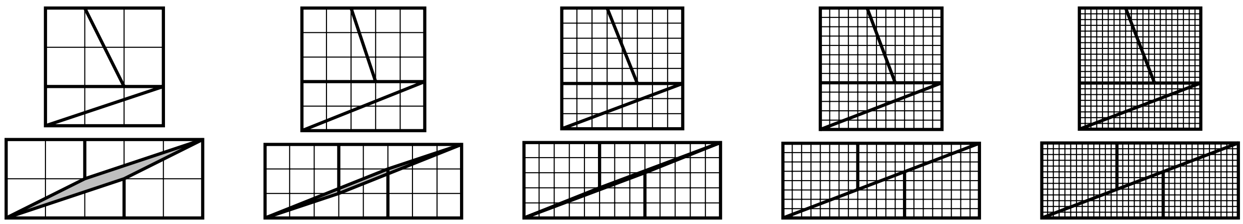
und daraus folgt die Cassini-Identität sofort durch Anwendung der Determinante auf beiden Seiten.

Drittens kann man die Cassini-Identität natürlich auch mit Hilfe von Computeralgebra beweisen. Wenn man keine spezielle Software zum Beweisen von Identitäten zur Hand hat, kann man ganz brutal die Binet-Formel $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n)$ in die linke Seite einsetzen und den resultierenden Ausdruck vereinfachen lassen. Ein gutes Computeralgebrasystem müsste $(-1)^n$ als Ergebnis liefern.

Weitere Beweise für die Cassini-Identität kann man in der Literatur finden.

Für $n = 6$ liefert die Cassini-Identität die Gleichung $13 \cdot 5 - 8 \cdot 8 = 1$, auf der das Rätsel basiert. Da die Cassini-Identität für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, funktioniert auch das Rätsel für jede Wahl von $n \in \mathbb{N}$, aber wenn n zu groß wird, macht das Nachzählen der kleinen Quadrate keinen Spaß mehr, und wenn n zu klein ist, sieht man die Lösung sofort.

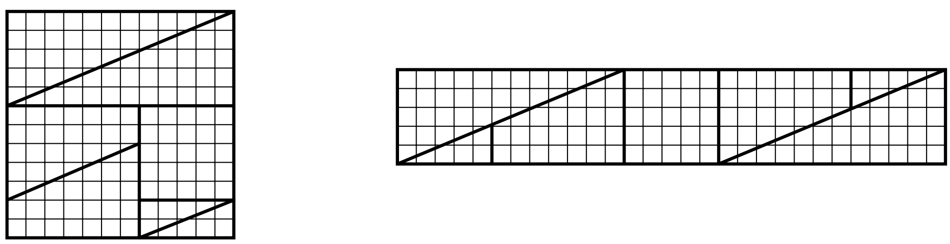
$n = 4$ $\quad$ $n = 5$ $\quad$ $n = 6$ $\quad$ $n = 7$ $\quad$ $n = 8$



Wie man an den Bildern für $n = 4$ und $n = 5$ sehen kann, sind die Puzzle-Teile beim Rechteck nicht ganz passgenau. Abhängig davon, ob n gerade oder ungerade ist, bleibt entlang der Diagonalen entweder ein kleiner Spalt oder man hat eine kleine Überlappung. Im Fall $n = 6$ ist der Spalt schon so schmal, dass man ihn leicht übersieht (zumindest wenn man die Schnittsegmente dick genug einzeichnet).

Die Cassini-Identität gilt nicht nur für Fibonacci-Zahlen, sondern auch für Fibonacci-Polynome. Das n-te Fibonacci-Polynom $F_n(x)$ ist ein Polynom in x vom Grad $n-1$, das rekursiv definiert ist durch $F_0(x) = 0$, $F_1(x) = 1$ und $F_n(x) = xF_{n-1}(x) + F_{n-2}(x)$ für $n \geq 2$. Damit ergeben sich also $F_2(x) = x$, $F_3(x) = x^2 + 1$, $F_4(x) = x^3 + 2x$, usw. Die Cassini-Identität besagt, dass $F_{n+1}(x)F_{n-1}(x) - F_n(x)^2 = (-1)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Für die spezielle Wahl $x = 1$ kommt man zurück zu den Fibonacci-Zahlen. Für $x = 2$ erhält man die sogenannten Pell-Zahlen $P_n = F_n(2)$. Die ersten Pell-Zahlen lauten $0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, \ldots$.

Lässt sich mit den Pell-Zahlen ein Puzzle konstruieren, das die Gleichheit $12^2 = 5 \cdot 29$ nahelegt? Hier ist ein Vorschlag:



Das Beispiel ist nicht ganz so schön wie das vorherige, weil es mehr Schnitte benötigt. Andererseits ist es auch schöner, weil die Puzzle-Teile nicht gedreht sondern nur verschoben werden. Das Prinzip ist jedenfalls dasselbe: alle schrägen Schnittsegmente haben eine Steigung, die dem Quotienten zweier aufeinanderfolgender Pell-Zahlen entspricht. Wegen der Cassini-Identität gilt $P_{n+1}/P_n \approx P_n/P_{n-1}$. Das ermöglicht die Schummelei beim Zusammenlegen.

Für $x = 3$ spezialisieren sich die Fibonacci-Polynome zur Zahlenfolge $0, 1, 3, 10, 33, 109, \dots$. Wir überlassen es dem Leser, mit dieser Folge ein Puzzle zu konstruieren, das die Identität $100 = 99$ nahelegt.

Manuel Kauers