Österreichische Mathematische Gesellschaft

# MATHE-BRIEF

**Februar 2018 — Nr. 86**

Herausgegeben von der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft
http: // www.oemg.ac.at / Mathe–Brief ——— mathe–brief@oemg.ac.at

## Von Polynomen und solchen, die's gern wären

Polynome gehören zu den einfachsten Funktionen und dennoch verblüffen sie uns mit so manch erstaunlichen Eigenschaften. Heute wollen wir Polynome in zwei Variablen über einem Körper $K$ genauer unter die Lupe nehmen und der (erstmals in [1] beantworteten) Frage nachgehen, ob jede Funktion $f: K^2 \to K$, $(x,y) \mapsto f(x,y)$, die bei festem $x$ ein Polynom in $y$ und bei festem $y$ eine Polynom in $x$ ist, notwendig eine Polynomfunktion in den zwei Variablen $x$ und $y$ sein muss. Erstaunlicherweise hängt die Antwort auf diese Frage wesentlich davon ab, welchen Körper $K$ man zugrunde legt und wir wollen stellvertretend für endliche, resp. abzählbar unendliche, resp. überabzählbar unendliche Körper die Fälle $K = \mathbb{F}_p$, resp. $K = \mathbb{Q}$, resp. $K = \mathbb{R}$ untersuchen.

Dem aufmerksamen Leser wird bereits aufgefallen sein, dass in der Fragestellung der Begriff Polynom für $f$ durch den Ausdruck Polynomfunktion ersetzt wurde. Dies ist notwendig, zumal wir $f$ nur durch seine Werte an allen Paaren $(x,y) \in K^2$ kennen und nicht $f$ an sich. Polynomfunktionen sind nun Funktionen, deren Auswertung an allen Stellen Werte liefert, die von der Auswertung eines (festen) Polynoms stammen. Diese Unterscheidung ist dadurch nötig, dass die Zuordnung Polynom-Polynomfunktion im Fall von endlichen Körpern nicht eindeutig (genauer: nicht injektiv) ist, und dies schon im Fall von Polynomen in einer Variable.

Als Beispiel wählen wir die Polynome $x^2+2$ und $x^6+2$ über dem endlichen Körper $\mathbb{F}_5$. Beide liefern die jeweils gleichen Funktionswerte für alle $x \in \mathbb{F}_5$ und definieren somit dieselbe Polynomfunktion $f$, weil $x^4 \equiv 1$ für alle von 0 verschiedenen $x \in \mathbb{F}_5$. Aus dem gleichen Grunde erfüllt auch die durch $g(0) = 2$, $g(x) = x^{-2}+2$ auf $\mathbb{F}_5$ definierte Funktion $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{F}_5$ und sie definert daher ebenfalls eine (dieselbe) Polynomfunktion, ohne selbst ein Polynom zu sein.

Man kann sogar einen Schritt weitergehen und zeigen, dass *jede* Funktion $f: K \to K$ auf einem endlichen Körper $K$ eine Polynomfunktion definiert. Für $K = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ ist nämlich $f$ durch $f(x_1), \ldots, f(x_n)$ eindeutig bestimmt und das Lagrange-Interpolationspolynom

$$L(x) := \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \prod_{j \neq k} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}$$

erfüllt $L(x_i) = f(x_i)$ für $i = 1, \ldots, n$, wie man durch Einsetzen leicht nachprüft.

Aufgrund dieser Erkenntnis reduziert sich unsere Fragestellung im Fall eines endlichen Körpers $K$ darauf, ob auch jede Funktion $f: K^2 \to K$ eine Polynomfunktion ist, zumal die Bedingung an die beiden Einschränkungen von $f$ auf eine Variable stets erfüllt ist. Wieder ist $f$ durch seine Werte an allen Paaren $(x_i, x_j)$ mit $x_i, x_j \in K$ eindeutig bestimmt und die Beobachtung, dass das Lagrange-Interpolationspolynom in zwei Variablen

$$L(x,y) := \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f(x_i, x_j) \prod_{i' \neq i} \prod_{j' \neq j} \frac{(x - x_{i'})(y - y_{j'})}{(x_i - x_{i'})(y_j - y_{j'})}$$

für alle Wertepaare $(x,y) \in K^2$ mit $f(x,y)$ übereinstimmt, beantwortet die Frage positiv.

Gleichzeitig ist das Lagrange-Interpolationspolynom auch der Schlüssel zur Lösung im Fall von Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Nach Voraussetzung ist $f(x,y)$ bei festem $x$ ein Polynom in $y$, dessen Grad schreiben wir kurz $\deg(f(x,y))$. Bezeichnet $E_n := \{x \in \mathbb{R} : \deg(f(x,y)) \leq n\}$ die Menge der reellen Zahlen $x$, für die $\deg(f(x,y))$ durch die positive, ganze Zahl $n$ beschränkt ist, so kann $\mathbb{R}$ als abzählbare Vereinigung $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ geschrieben werden, sodass für mindestens ein $n$ folgt, dass $E_n$ unendlich sein muss.

Für festes $x \in E_n$ ist $f(x,y)$ nach Voraussetzung ein Polynom in $y$ vom Grad $\leq n$, das folglich durch seine Werte an $n+1$ verschiedenen Werten von $y$, etwa $y_0, y_1, \ldots, y_n$, vollständig bestimmt ist. Somit gilt für alle $x \in E_n$ und alle $y \in \mathbb{R}$:

$$f(x,y) = \sum_{k=0}^{n} f(x, y_k) \prod_{j \neq k} \frac{y - y_j}{y_k - y_j}.$$

Diese Funktion sieht zwar aus wie ein Polynom $n$-ten Grades in $y$; weil es aber nur ein einziges Polynom höchstens $n$-ten Grades gibt, das in $n+1$ verschiedenen Werten von $y$ gegebene Werte in $\mathbb{R}$ annimmt, müssen sich Terme, deren Grad über den des Polynoms $f(x,y)$ in $y$ bei festem $x$ hinausgeht, gegenseitig aufheben. Für festes $y$ sind sowohl $f(x,y)$ als auch die Summe auf der rechten Seite nach Voraussetzung Polynome in $x$, die auf der unendlichen Menge $E_n$ übereinstimmen, also auf ganz $\mathbb{R}$ idente Werte annehmen. Damit stimmen $f$ und das angegebene Polynom auf der rechten Seite an allen Paaren reeller Zahlen überein, sodass $f$ tatsächlich eine Polynomfunktion ist.

An dieser Stelle lohnt es sich, zu betonen, dass das wesentliche Argument dieser Beweisführung auf der Existenz einer *unendlichen* Teilmenge von $K$ beruht, auf der die jeweilige Einschränkung von $f$ auf eine der Variablen lauter Polynome von beschränktem Grad liefert. Ein solches Argument steht uns im Fall von Funktionen $f : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}$ nicht zur Verfügung; es wäre ja durchaus denkbar , dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Menge der $(x,y) \in \mathbb{Q}^2$, für die $\deg(f(x,y))$ als Polynom in $x$ oder als Polynom in $y$ durch $n$ beschränkt ist, endlich ist.

Eine solche Funktion hat S. Palais in [2] effektiv angegeben. Bezeichnet $r_1, r_2, r_3, \ldots$ eine Folge, in der jede rationale Zahl genau einmal vorkommt, so definiert

$$f_n(x) := (x - r_1) \cdots (x - r_n)$$

ein Polynom vom Grad $n$, für das $f_n(r_m) = 0$ für $n \geq m$. Für jedes $(x,y) \in \mathbb{Q}^2$ verschwinden daher in der Summe

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) f_n(y)$$

alle bis auf endlich viele Summanden, sodass durch die formal unendliche Summe eine Funktion $f(x,y) : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}$ festgelegt wird. Die Funktionen $f(x, r_m)$ und $f(r_m, y)$ sind jeweils Polynome vom Grad $m-1$, da der führenden Koeffizient $\prod_{i=1}^{m-1}(r_m - r_i)$ nach Definition der Folge $(r_n)_{n \geq 1}$ nicht null ist. Daher kann $f(x,y) : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}$ keine Polynomfunktion darstellen, zumal sie als solche dieselben Werte wie ein Polynom in zwei Variablen annehmen müsste. Dessen Grad wäre dann als feste Zahl beschränkt und damit auch der Grad der Einschränkung auf jede der beiden Variablen an den Stellen $x = r_m$ resp. $y = r_m$, ein Widerspruch dazu, dass diese Polynome Grad $m-1$ haben.

## LITERATUR


[1] F. W. Carroll, A polynomial in each variable separately is a polynomial. *Amer. Math. Monthly* 68 (1961), 42.

[2] Richard S. Palais, Some analogues of Hartogs' theorem in an algebraic setting. *Amer. J. Math.* 100 (1978), no. 2, 387–405.



*Leonhard Summerer*