Österreichische Mathematische Gesellschaft

MATHE-BRIEF

Januar 2018 — Nr. 85

Herausgegeben von der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft
http://www.oemg.ac.at/Mathe–Brief ——— mathe–brief@oemg.ac.at

MATHEMATIK MIT HUMOR

Die Mathematik muss keineswegs eine unzugängliche, sperrige Wissenschaft sein und darf auch eine emotionale Dimension haben.
Der Zeichner Markus Roskar (Universität für angewandte Kunst Wien) hat die folgenden Beispiele illustriert.

Mathematik und die anderen Wissenschaften

Mathematik wurde u.A. nicht als Selbstzweck erfunden (und gilt heute als die am weitesten entwickelte Wissenschaft), sondern sie sollte immer auch anderen Wissenschaften eine Hilfe sein. Heute hat sie ihren Siegeszug nahezu in die letzten Winkel anderer Wissenschaften geschafft. Sei es die Biologie, die Geographie, die Medizin, die Musikwissenschaft, usw.
Wo die Mathematik naturgemäß sehr stark verankert ist, ist die Physik. Physiker sind „halbe Mathematiker" – auch wenn es neben der theoretischen Physik auch die praktische gibt.

Was Wunder, wenn es mathematische Physiker-Witze gibt?
Hier ein guter: Fahren drei Mathematiker und drei Physiker in der Bahn zu einem Kongress. Zum Erstaunen der Mathematiker haben sich die Physiker nur eine Fahrkarte für alle zusammen gekauft.
Als die Silhouette des Schaffners sichtbar wird, verschwinden alle drei Physiker auf der Toilette. Der Schaffner bemerkt, dass die Tür zum WC abgeschlossen ist, klopft an und sagt "Fahrschein bitte!". Da erscheint tatsächlich ein Fahrschein im Türspalt, der Schaffner entwertet ihn, schiebt die Karte zurück und kontrolliert die anderen Fahrgäste.
Der Kongress geht zu Ende, und die beiden Dreiergruppen fahren retour. Wieder haben sich die Physiker nur einen Fahrschein gekauft, die Mathematiker jedoch *gar keinen*.
Die Silhouette des Schaffners taucht im Nebenwaggon auf, die Physiker schließen sich wieder in der Toilette ein. Ein Mathematiker geht zur WC-Tür, klopft an und sagt: „Fahrschein bitte!"

Bei der Aufzählung der Wissenschaften, die Mathematik brauchen, haben wir fast die wichtigsten „Kunden" vergessen: Die Ingenieure. Sie lieben – zu Recht – die Mathematik, und wenden sie ständig an, wenn sie Brücken bauen, Maschinen optimieren, Stromkreise berechnen uvm. Dabei sind sie einem Mathematiker manchmal zu ungenau:

Wieder in einem Zug, meinetwegen in Schottland, sitzen ein Ingenieur, ein Philosoph und ein Mathematiker. Sie sehen eine Schafherde mit einem schwarzen Schaf. Der Ingenieur witzelt, dass es offensichtlich auch in Schottland schwarze Schafe gäbe; der Philosoph ermahnt ihn, nicht zu generalisieren, sondern eben nur von *zumindest einem* schwarzen Schaf zu sprechen; der Mathematiker lässt auch das nicht gelten und formuliert um auf *zumindest einem Schaf, das zumindest auf einer Seite schwarz ist.*

Ein Jahr im freien Fall

Manchmal hört man den Ausdruck: „Die Wirtschaft befindet sich seit Monaten im freien Fall". Wie schnell sind wir, wenn wir ein Jahr lang so beschleunigen, dass wir jede Sekunde um 10 Meter pro Sekunde schneller werden (das ist dann die Erdbeschleunigung, also 1 g)? 30 Millionen Sekunden (soviele Sekunden hat ein Jahr) mit 10 m/s Zuwachs pro Sekunde ergibt 300 000 Kilometer pro Sekunde. Lichtgeschwindigkeit! Natürlich ist das eine rein theoretische Rechnung, weil die Physik ja lehrt, dass wir die Lichtgeschwindigkeit nie erreichen und schon gar nicht überschreiten können. Auch kann keine Raumsonde aktiv ein Jahr beschleunigen, weil der Treibstoff bald ausginge. Aber Raumsonden können mit der Anziehung von Himmelskörpern „arbeiten" (der kurze englische Ausdruck dafür lautet *swing-by*).

Die Sonden Voyager 1 und Voyager 2 wurden nicht zufällig im Jahr 1977 auf die Reise geschickt. In diesem Jahr war die Konstellation der großen Planeten Jupiter, Saturn, Uranus so günstig, dass die Sonden, die sich ja im freien Fall befinden (wenn sie nicht gerade ihre Raketen betätigen), immer wieder neuen Schwung an ihnen holen konnten. Mittlerweile haben die Sonden den Rand unseres Sonnensystems überschritten. Im Moment gibt es kaum Kräfte, die auf sie wirken, außer die latente Anziehung durch das schwarze Loch im Zentrum unserer Galaxie, die durch die Rotation um dieses Zentrum wettgemacht wird. Der letzte große Planet, Neptun, ist $4,5$ Milliarden Kilometer von der Sonne entfernt. Dafür braucht das Sonnenlicht ein paar Stunden, Voyager 2 knapp 12 Jahre. Aber nachher ist es ziemlich einsam ...

Wenn man aus einem Heißluftballon aus 40 km abspringt, bremst einen die Atmosphäre praktisch nicht. Nach 35 Sekunden freiem Fall (1 g) erreicht man eine Geschwindigkeit von 350 Metern pro Sekunde und ist damit schneller als der Schall.
Wenn man fast zwei Minuten in einer Rakete mit 10 g beschleunigt (das ist echt grenzwertig!), erreicht man die magische Geschwindigkeit von 11 200 m/s (das sind etwa 40 000 km/h), die man braucht, um das Schwerefeld der Erde für immer verlassen zu können.
Umgekehrt schlagen Meteoriten und Astroiden „gerne" mit ähnlichen Geschwindigkeiten auf der Erde ein, weil der Vorgang auch umgekehrt werden kann. So einem Vorgang verdanken wir es, überhaupt die Erde zu bevölkern (die Saurier hätten das sonst nicht zugelassen, aber sie sind durch den gewaltigen Einschlag vor 66 Millionen Jahren ausgestorben).

Wenn der Mond ein Teil der Erde wäre

Also: Das war es ja einmal (vor mehr als vier Milliarden Jahren) der Fall – bis ein gewaltiger Einschlag (neuerdings geht man sogar von bis zu 20 solchen Einschlägen aus) zur Bildung des Monds führte. Dann ist doch die Frage interessant: Wie viel größer war die Erde vor diesem „deep impact"?

Denken wir uns zu diesem Zweck zunächst mal den Mond aus lauter Wasser bestehend (man hat übrigens erst vor kurzem nachgewiesen, dass es sehr wohl auch Wasser auf dem Mond gibt, wenn auch in gefrorenem Zustand und unterirdisch). Würden wir diese riesige Wasserkugel (mit $1/4$ des Durchmessers der Erde) über die Ozeane ergießen, um wie viel würde der Wasserspiegel steigen?
Zwischenrechnung: Die Ozeane bedecken knapp $3/4$ der Erde und sind durchschnittlich 4 km tief. Man könnte also grob sagen: Wenn die Erde keine Landmasse hätte und die gesamte Oberfläche mit einer 3 km tiefen Wasserschicht bedeckt wäre, käme in etwa dieselbe Wassermasse heraus.

Um wie viel würde also das Wasser steigen? Sehr schwer zu schätzen. Aber mit ein bisschen Kopfrechnen durchaus herauszukriegen:
Dadurch, dass der Mond $1/4$ des Durchmessers der Erde hat, hat er $\frac{1}{4^2} = 1/16$ der Oberfläche und $\frac{1}{4^3} = 1/64$ der Volumens der Erde. Das Erdvolumen steigt beim Umverteilen um den Faktor $65/64 \approx 1{,}06$, also 6%. Der Radius der Erdkugel würde demnach um $\sqrt[3]{1{,}06} \approx 1{,}02$ steigen (ein geübter Kopfrechner braucht dazu keinen Taschenrechner: Der geringe Überschuss von 6% schrumpft beim Ziehen der dritten Wurzel annähernd auf ein Drittel). Der Erdradius würde also um 2% oder $1/50$ größer werden. Dass der Erdradius gut 6000 km ist, wissen wir hoffentlich noch aus der Schule. $1/50$ davon sind 120 km. Die Ozeane wären dann immerhin (oder doch „nur"?) – grob geschätzt – 123 km tief.
Bei der Entstehung des Mondes wurden also 120 km von Mutter „abgetragen" – vornehmlich von der weniger dichten Oberfläche, weswegen der Mond auch nur $1/81$ (und nicht $1/64$) der Erdmasse hat.

Die Anziehungskraft an der Oberfläche eines Himmelskörpers nimmt einerseits mit der dritten Potenz des Radius zu (Massenzuwachs), anderseits nimmt sie mit dem Quadrat des Radius ab (Entfernung vom Massenmittelpunkt). Auf der Mondoberfläche ($1/4$ Radius der Erde) würde man daher $1/4$ der Anziehungskraft wie auf der Erde ($1/4\ g$) erwarten. Weil der Mond aber eine um ca. $1/4$ geringere Dichte hat, ist die Anziehung nur etwa $1/5\ g$.

Georg Glaeser

Im Namen der Redaktion Glückwünsche an alle Leserinnen und Leser zum Neuen Jahr 2018!