Österreichische Mathematische Gesellschaft

MATHE-BRIEF

November 2017 — Nr. 83

Herausgegeben von der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft
http://www.oemg.ac.at/Mathe–Brief ——— mathe–brief@oemg.ac.at

’Vernünftige’ Kreispunkte

Ganze Zahlen braucht man zum Zählen, Brüche zum Teilen: Wenn fünf Kinder von ihrem Taschengeld ein Kuchenstück kaufen wollen, das 2 Euro kostet, dann trifft es auf jedes Kind $\frac{2}{5}$ Euro, oder 0,40 Cent. Wenn es nur drei Kinder sind, dann bekommt jedes Kind mehr, aber es muss auch mehr bezahlen, genau genommen $\frac{2}{3}$ Euro. Allerdings führt das auf eine Schwierigkeit: als Dezimalbruch geschrieben, wäre $\frac{2}{3} = 0,\overline{6}$ (d.h. sechs periodisch), und $0,\overline{6}$ Euro gibt es nicht. Wahrscheinlich einigen sie sich darauf, dass zwei von ihnen 67 Cent und eines 66 Cent zahlt.

In der Mathematik nennt man Brüche, deren Zähler und Nenner ganze Zahlen sind, ’rationale’ (das heißt eigentlich ’vernünftige’) Zahlen - es sind genau die Zahlen, die als periodische Dezimalbrüche geschrieben werden können (schlimmstenfalls endend mit lauter Nullen). Mit diesen Zahlen haben auch schon die alten Griechen gearbeitet. Ein Problem war für sie, dass sie es in der Geometrie auch mit Strecken zu tun hatten, deren Länge nicht durch eine rationale Zahl ausdrückbar war, wie die Diagonale des Einheitsquadrates. Man kann zwar hinschreiben $\sqrt{2}$, aber über den genauen Wert dieser Zahl ist damit nichts gesagt; wenn man sie als Dezimalbruch schreiben will, kann man heutzutage zwar mit einem Computer viele Dezimalstellen ausrechnen, aber irgenwann einmal muss man Schluss machen und weiß dann nicht, wie es hinter der letzten berechneten Dezimalstelle weitergeht. Solche Zahlen, die nicht ’rational’ sind, nennt man in der Mathematik ’irrational’ - was eigentlich ’unvernünftig’ heißt, obwohl man mit ihnen genau so rechnen kann, wie mit ’vernünftigen’ Zahlen.

Ein geometrisches Verfahren, eine Strecke beliebiger rationaler Länge - z.B. $\frac{9}{7}$ - zu konstruieren, kann beispielsweise so aussehen: wir verbinden den Punkt $P = (-1,0)$ in einem kartesischen Koordinatensystem in der Euklidischen Ebene mit dem Punkt $(6,9)$ und schneiden diese Gerade, die dann die Steigung $\frac{9}{7}$ hat, mit der y-Achse im Punkt Q; der hat dann die Koordinaten $(0,\frac{9}{7})$. Allgemeiner, wenn wir durch den Punkt P eine Gerade g mit der (nicht notwendigerweise rationalen) Steigung d legen – sie hat dann die Gleichung $y = dx + d$ – , dann schneidet diese die y-Achse im Punkt $(0,d)$.

Wenn $d = \frac{m}{n}$ (wobei m und n ganze Zahlen sind), dann schließt die Gerade g mit der x-Achse einen Winkel α ein, dessen Tangens $\tan\alpha$ gerade diesen rationalen Wert d hat. Für $|d| \leq 1$ ist es überhaupt nicht schwierig, einen Winkel α zu konstruieren, dessen Cosinus den rationalen Wert $\cos\alpha = d$ besitzt: wir verbinden den Punkt $(d,\sqrt{1-d^2})$ auf der oberen Hälfte des Einheitskreises $x^2 + y^2 = 1$ mit dem Ursprung $O = (0,0)$ und bezeichnen mit α den Winkel, den dieser Radius mit der positiven x-Achse einschließt. Allerdings wird dann im Allgemeinen der Sinus $\sin\alpha = \sqrt{1-d^2}$ nicht mehr eine rationale Zahl sein. Schon für einen so ’einfachen’ Winkel wie $\alpha = \frac{\pi}{3}$ (oder $60°$) ist $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, aber $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

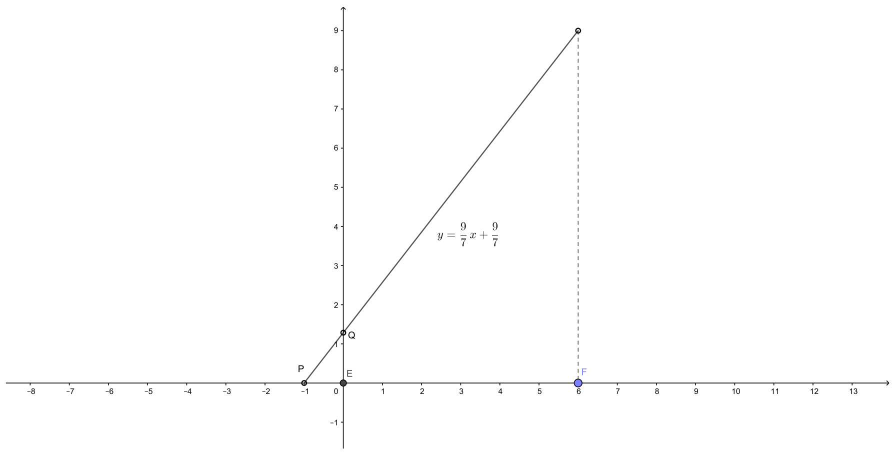

ABBILDUNG 1. Konstruktion einer Strecke PQ der Länge $\frac{9}{7}$

Das veranlasst den neugierigen Mathematiker natürlich gleich, die Frage zu stellen: Gibt es auf dem Einheitskreis außer den Punkten $(\pm 1, 0), (0, \pm 1)$ noch andere 'rationale' Punkte (x, y), deren Koordinaten x und y beide rational sind?

Hier springt Pythagoras mit seinen 'pythagoräischen Zahlentripeln' ein: drei ganze positive Zahlen a, b und c, paarweise teilerfrend, für die $a^2 + b^2 = c^2$ und deshalb $(\frac{a}{c})^2 + (\frac{b}{c})^2 = 1$ gilt. Man bekommt sämtliche pythagoräischen Zahlentripel in der Form $a = e^2 - f^2$, $b = 2ef$, $c = e^2 + f^2$, wenn man (e, f) sämtliche Paare positiver ganzer Zahlen mit ungerader positiver Differenz $e - f$ durchlaufen lässt (wie in Mathe-Brief 2 erläutert). Jedes solche Zahlentripel liefert einen rationalen Punkt $(\frac{e^2-f^2}{e^2+f^2}, \frac{2ef}{e^2+f^2})$ auf dem Einheitskreis, für $f = 1$, $e = 2$ beispielsweise den Punkt $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$, und umgekehrt liefert jeder rationale Punkt $(\frac{k}{l}, \frac{p}{q})$ auf dem Einheitskreis nach Division durch den größten gemeinsamen Teiler der drei Zahlen kq, lp und lq ein pythagoräisches Zahlentripel $\{kq/u, lp/u, lq/u\}$. Dies folgt aus den Gleichungen

$$\begin{aligned}
\left(\frac{k}{l}\right)^2 + \left(\frac{p}{q}\right)^2 &= 1 \\
k^2q^2 + l^2p^2 &= l^2q^2 \\
\left(\frac{kq}{u}\right)^2 + \left(\frac{lp}{u}\right)^2 &= \left(\frac{lq}{u}\right)^2.
\end{aligned}$$

Es gibt unendlich viele verschiedene pythagoräische Zahlentripel und deshalb auch unendlich viele rationale Punkte auf dem Einheitskreis. Das sagt aber noch nichts darüber aus, wie diese auf dem Kreisumfang verteilt sind. Es könnte ja auch 'Lücken' geben, also kleine Bogenstücke, die keine rationalen Punkte enthalten. Bei einer Klärung dieser Frage kommt uns die schon eingangs vorgestellte Gerade g durch den Punkt $P = (-1, 0)$ zu Hilfe. Nehmen wir an, sie hat die rationale Steigung $d = \frac{m}{n}$. Sie schneidet den Kreis außer in P in einem zweiten Punkt $R = (x, y)$, dessen Koordinaten dann die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= 1 \\ y &= dx+d \end{aligned}$$

erfüllen müssen. Aus ihnen kann man x und y folgendermaßen berechnen:

$$\begin{aligned} x^2+(dx+d)^2 &= 1 \\ (d^2+1)x^2+2d^2x+d^2-1 &= 0 \\ x_{1,2} &= \frac{-2d^2 \pm \sqrt{4d^4-4(d^2+1)(d^2-1)}}{2(d^2+1)} \\ &= \frac{-2d^2 \pm \sqrt{4}}{2(d^2+1)} \\ &= \frac{-d^2 \pm 1}{d^2+1} \end{aligned}$$

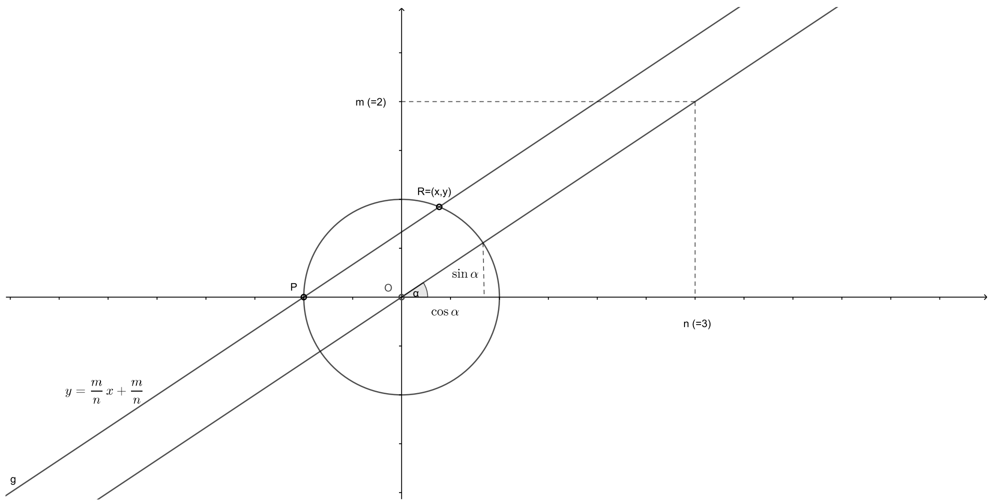

ABBILDUNG 2. Konstruktion eines Kreispunktes (x,y) mit rationalen Koordinaten

Eine Wahl des Minus-Zeichens liefert den Ausgangspunkt $P = (-1,0)$. Also hat der Punkt R die Koordinaten

$$\begin{aligned} x &= \frac{1-d^2}{1+d^2} \\ y &= d(x+1) \\ &= d\left(\frac{1-d^2}{1+d^2}+1\right) \\ &= \frac{2d}{1+d^2} \end{aligned}$$

Wenn die rationale Zahl d als gekürzter Bruch die Form $d = \frac{m}{n}$ hat, erhalten die Koordinaten von R die Form $(x = \frac{n^2-m^2}{n^2+m^2}, y = \frac{2mn}{n^2+m^2})$. Also liefert jede Gerade g mit rationaler Steigung d einen rationalen Kreispunkt, und weil die rationalen Zahlen d auf der Zahlengeraden dicht liegen, liegen diese rationalen Kreispunkte dicht auf dem Kreis. Umgekehrt hat die Verbindungsgerade eines beliebigen rationalen Punktes R auf dem Kreis mit dem Punkt P eine rationale Steigung, d.h. die Geraden g durch P mit rationaler Steigung entsprechen umkehrbar eindeutig den rationalen Punkten R auf dem Kreis.

Die Geraden g durch P mit irrationaler Steigung schneiden den Kreis in je einem weiteren Punkt Q, der kein rationaler Punkt sein kann, und weil es viel mehr irrationale Werte für die Steigung gibt als rationale (es gibt nur abzählbar viele rationale Zahlen, d.h. man kann sie mit den natürlichen Zahlen $1, 2, \cdot$ nummerieren, aber die Menge der irrationalen Zahlen ist überabzählbar, d.h. die natürlichen Zahlen reichen nicht aus, um sie zu nummerieren), gibt es auch viel mehr nicht rationale Punkte auf dem Kreis als rationale Punkte. Trotzdem gibt es in jedem noch so kleinen Bogenstück unendlich viele rationale Kreispunkte.

Wahrscheinlich war das den Griechen noch nicht bewusst, von Koordinaten war zu ihrer Zeit ja noch keine Rede. Sie hätten aber möglicherweise ihre Freude daran gehabt.

Gilbert Helmberg

Literatur

Ash, Avner; Gross, Robert: *Elliptic Tales.* Princeton University Press, Oxford 2012 (Prologue).