Österreichische Mathematische Gesellschaft

MATHE-BRIEF

Oktober 2017 — Nr. 82

Herausgegeben von der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft
http: // www.oemg.ac.at / Mathe–Brief ——— mathe–brief@oemg.ac.at

EIN HÜBSCHER ALGORITHMUS UND EIN LEICHTER BEWEIS EINES VERBLÜFFENDEN SATZES

Man nennt zwei Mengen A und B *gleichmächtig*, wenn es eine bijektive Abbildung $\psi : A \to B$ gibt. Man kann auch sagen, dass in diesem Fall A und B „gleich viele“ Punkte haben. Hier soll ein einfacher Beweis gegeben werden, dass das Intervall $\{x : 0 < x \leq 1\}$ und das Quadrat $\{(\xi,\eta) : 0 < \xi \leq 1, 0 < \eta \leq 1\}$ gleich viele Punkte haben. Dieser Beweis könnte für Schülerinnen und Schüler der letzten Schulstufen einen interessanten Einstieg in Georg Cantors berühmt-berüchtigte Mengenlehre bedeuten.

Wir benutzen einen Algorithmus, der oft mit dem Namen von Friedrich Hirzebruch verbunden wird, der aber von Erna Zurl in einer Publikation aus 1935 untersucht wurde (biographische Details findet man in Oskar Perrons Buch *Die Lehre von den Kettenbrüchen*). Man betrachte dazu die Abbildung

$$\begin{aligned} &H : (0,1] \to (0,1], \\ &H(x) = b - \frac{1}{x} \quad \text{für} \quad \frac{1}{b} < x \leq \frac{1}{b-1}, \quad b = 2,3,,4\ldots \end{aligned}$$

(d.h. $b = b(x) = b_1$ ist die kleinste ganze Zahl, die größer als der Kehrtwert $1/x$ ist). Beachte, dass stets $0 < H(x) \leq 1$ gilt. Daraus ergibt sich

$$x = \frac{1}{b - H(x)}.$$

Wenn in der letzten Formel x durch $H(x)$ ersetzt und $b_2 = b(H(x))$ gesetzt wird, ergibt sich

$$H(x) = \frac{1}{b_2 - H(H(x))}.$$

Durch Iteration erhält man die Entwicklung

$$x = \frac{1}{b_1 - H(x)} = \cfrac{1}{b_1 - \cfrac{1}{b_2 - H(H(x))}} = \cfrac{1}{b_1 - \cfrac{1}{b_2 - \cfrac{1}{b_3 - H(H(H(x)))}}} = \cfrac{1}{b_1 - \cfrac{1}{b_2 - \cfrac{1}{b_3 - \cdots}}}$$

Diese sogenannte *Kettenbruchentwicklung* ist für jede Zahl $x \in (0,1]$ unendlich und eindeutig! Die rationalen Zahlen bilden keine Ausnahme. Für $x = 1$ ergibt sich zum Beispiel wegen $b_1 = 2$ und $H(1) = 1$ die periodische Entwicklung

$$1 = \frac{1}{2-1} = \frac{1}{2-\frac{1}{2-1}} = \frac{1}{2-\frac{1}{2-\frac{1}{2-1}}} = \frac{1}{2-\frac{1}{2-\frac{1}{2-\cdots}}}.$$

Um für eine allgemeine rationale Zahl $x = \frac{p}{q}$ $(0 < p \leq q)$ einzusehen, dass die Kettenbruchentwicklung unendlich und periodisch ist, berechnen wir zuerst

$$H(x) = b_1 - \frac{q}{p} = \frac{b_1 p - q}{p} = \frac{p_1}{q_1}.$$

Wegen $\frac{p}{q} \leq \frac{1}{b_1 - 1}$ ist $b_1 - 1 \leq \frac{q}{p}$ und der Zähler $p_1 = pb_1 - q$ ist kleiner oder gleich p. Wir erhalten $H_n(x) = H(H(\ldots(x)\ldots) = \frac{p_n}{q_n}$ mit Zählern $p_1 \geq p_2 \geq p_3 \ldots$. Schließlich muß einmal $p_n = b_n p_{n-1} - q_{n-1} = p_{n-1}$ gelten, was auf $H_{n-1} = \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{1}{b_n - 1}$ und $H_n(x) = 1$ führt. In diesem Fall geht der Kettenbruch, wie oben für $x = 1$ beschrieben, unendlich periodisch weiter.

Als nächstes überlegen wir uns, dass einer beliebigen Folge $b_1, b_2, b_3, \ldots \geq 2$ auch tatsächlich eine reelle Zahl $x \in (0,1]$ entspricht. Die Folge

$$\frac{1}{b_1}, \quad \frac{1}{b_1 - \frac{1}{b_2}}, \quad \frac{1}{b_1 - \frac{1}{b_2 - \frac{1}{b_3}}}, \quad \text{und so weiter}$$

ist *wachsend* (durch Subtraktion im Nenner werden Brüche größer) und sie ist nach oben durch 1 beschränkt, sie besitzt also einen Grenzwert $x \in (0,1]$. Diese Zahl x ist offensichtlich so konstruiert, dass ihre Kettenbruchentwicklung genau die gegebenen Nenner $b_1, b_2, \ldots$ besitzt.

Wir sind nun in der Lage, den angekündigten Beweis zu führen. Für

$$x = \frac{1}{b_1 - \frac{1}{b_2 - \frac{1}{b_3 - \cdots}}}$$

setze man

$$\xi = \frac{1}{b_1 - \frac{1}{b_3 - \frac{1}{b_5 - \cdots}}}, \qquad \eta = \frac{1}{b_2 - \frac{1}{b_4 - \frac{1}{b_6 - \cdots}}}.$$

So werden aus einer reellen Zahl $x \in (0,1]$ zwei reelle Zahlen $\xi, \eta \in (0,1]$, und umgekehrt kann man aus beliebigen $\xi, \eta \in (0,1]$ durch Mischen der Kettenbruchentwicklungen eine einzige reelle Zahl x erzeugen.[1]

F. Schweiger

[1] Als kleines Postskriptum sei angemerkt, dass man dieselbe Idee auch mit der bekannten Dezimalbruchentwicklung versuchen kann, aber dann erfordern die rationalen Zahlen bzw. die periodischen Entwicklungen eine gesonderte Behandlung.