Österreichische
Mathematische
Gesellschaft

MATHE-BRIEF

September 2017 — Nr. 81

Herausgegeben von der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft
http: // www.oemg.ac.at / Mathe–Brief ——— mathe–brief@oemg.ac.at

Olympische Spiele 2017

Dem Andenken von Wolfgang Gmeiner (1940 – 2017)

Nein, nein – keine Sorge, es handelt sich um mathematische Olympiaden. Im Folgenden ist die Rede von einigen Spiele-Aufgaben verschiedener Schwierigkeitsgrade, die im Jahr 2017 von Schülerinnen und Schülern bei mathematischen Wettbewerben, die in Form sog. Olympiaden ablaufen, zu bearbeiten waren. Ich lade Sie ein, sich zuerst ein wenig an den vier Aufgaben zu versuchen und gegebenenfalls einen kurzen Blick auf die Lösungen zu werfen.
Also,
Aufgabe 1. Alice und Bob spielen folgendes 2017er-Spiel (mit abwechselnd ausgeführten Subtraktionen):

- Alice wählt (geheim) eine Zahl $a \in \{2,4,6,8\}$.
- Ebenso wählt Bob eine Zahl $b \in \{3,5,7,9\}$.
- Am Spielfeld steht die Zahl $z = 2^4 + 0^4 + 1^4 + 7^4$.

Nun beginnt das Spiel mit dem Ziel, die Zahl 2017 zu erreichen. Zuerst subtrahiert Alice von z die Zahl a, anschließend Bob vom Ergebnis die Zahl b, dann wieder Alice die Zahl a, dann wieder Bob die Zahl b usw., solange, bis Alice oder Bob die Zahl 2017 erreicht und damit das Spiel gewonnen hat. Andernfalls endet das Spiel unentschieden.
Man beweise, dass Bob das Spiel unter keinen Umständen gewinnen kann, und man entscheide, ob dies auch für Alice so ist.

Aufgabe 2. Auf einer Tafel stehen die Zahlen $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{2017}$. Alice und Bob reduzieren abwechselnd die Zahlen nach folgender Regel:

- In jedem Zug darf man zwei beliebige Zahlen x und y von der Tafel streichen und durch die neue Zahl $z = x + y + xy$ ersetzen.
- Das Spiel endet, sobald nur noch eine Zahl auf der Tafel steht.

Gewonnen hat, wer als Letzter eine ganze Zahl auf die Tafel geschrieben hat.
Man entscheide, ob Alice als Erste oder als Zweite in das Spiel einsteigen soll, wenn sie das Spiel gewinnen will, oder ob dies keinen Einfluss auf ihre Gewinnchance hat.

Aufgabe 3. Auf der Tafel stehen die drei natürlichen Zahlen 2000, 17 und n. Alice und Bob spielen folgendes Spiel: Alice beginnt, dann sind sie abwechselnd am Zug. Ein Zug besteht darin, eine der drei Zahlen auf der Tafel durch den Betrag der Differenz der beiden anderen Zahlen zu ersetzen. Dabei ist kein Zug erlaubt, bei dem sich keine der drei Zahlen verändert. Wer an der Reihe ist und keinen erlaubten Zug mehr machen kann, hat verloren.

- Man beweise, dass das Spiel für jedes n irgendwann zu Ende geht.
- Wer gewinnt, wenn $n = 2017$ ist?

Aufgabe 4. Auf einer Tafel stehen die Zahlen $1, 2, 3, \ldots, 87, 88$. Alice und Bob wählen abwechselnd eine der Zahlen, die dann von der Tafel gelöscht wird, solange, bis keine Zahl mehr auf der Tafel steht. Alice beginnt das Spiel und zählt am Schluss ihre vierzig gewählten Zahlen zusammen. Wenn sie dabei die Zahl 2017 erhält, hat sie gewonnen, andernfalls Bob.
Man entscheide, ob es für Alice oder Bob möglich ist, ihren bzw. seinen Sieg zu erzwingen.

Lösungen

Aufgabe 1. Wir haben $z = 2418$. Bob kann niemals gewinnen. Andernfalls müssten Alice und Bob gleich viele Züge ausführen. Wenn wir ihre Anzahl mit n bezeichnen, müsste die Gleichung

$$2418 - n(a+b) = 2017, \text{ d.h. } n(a+b) = 401$$

gelten. Weil 401 eine Primzahl ist, ergäbe sich aber $n = 1$ oder $a + b = 1$. Beide Fälle sind aber nicht erfüllbar.
Nun zu Alice. Weil sie im Fall ihres Sieges einen Zug mehr als Bob auszuführen hat, ergibt sich die Gleichung

$$2418 - n(a+b) - a = 2017, \text{ d.h. } n(a+b) = 401 - a$$

Von den Zahlen $401 - a \in \{393, 395, 397, 399\}$ ist 397 eine Primzahl. Die übrigen haben haben die Primfaktorzerlegungen $393 = 3 \cdot 131$, $395 = 5 \cdot 79$ bzw. $399 = 3 \cdot 7 \cdot 19$. Wegen $5 \leq a + b \leq 17$ liefert 399 die einzig mögliche Gewinnzahl von Alice, nämlich $a = 2$. Mit ihr gewinnt Alice nach 57 Zügen genau dann, wenn Bob die Zahl $b = 5$ gewählt hat.

Aufgabe 2. Es seien $x_j = \frac{1}{j}, j = 1, 2, \ldots, 2017$, die am Beginn des Spiels auf der Tafel stehenden Zahlen. Wegen

$$z = x + y + xy = (x+1)(y+1) - 1, \text{ d.h. } z + 1 = (x+1)(y+1)$$

ist es nahe liegend, die Zahlen der ursprünglichen Tafel durch die neuen Zahlen $X_j = x_j + 1, j = 1, 2, \ldots, 2017$, zu ersetzen. Einem ursprünglichen Spielzug entspricht es deshalb, zwei der neuen Zahlen zu streichen und durch ihr Produkt zu ersetzen. Folglich muss die letzte Zahl der neuen Tafel

$$X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots \cdot X_{2017} = \frac{1+1}{1} \cdot \frac{1+2}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{1+2017}{2017} = 2018$$

sein. Das heißt aber, dass jedes denkbare Spiel mit der Zahl 2017 endet. Deshalb sollte Alice als Zweite in das Spiel einsteigen.

Aufgabe 3. Wenn drei Zahlen auf der Tafel stehen und bei einem Zug eine der drei Zahlen durch die (positive) Differenz der anderen beiden Zahlen ersetzt wird, so stehen nach diesem Zug zwei Zahlen und die Summe der beiden Zahlen auf der Tafel. Es sei o. B. d. A. $b > a$ und a, b und $a + b$ stehen auf der Tafel. Dann gibt es wegen $a + b - b = a$ und $a + b - a = b$ nur einen möglichen Zug und es stehen nachher a, b und $b - a$ auf der Tafel. Auch dann ist eine der Zahlen (nämlich b) die Summe der anderen beiden und es gibt nur einen möglichen Zug.

Man erkennt also, dass es spätestens ab dem zweiten Zug keine Auswahl der Züge mehr gibt und alle Züge zwangsläufig sind. Weiters erkennt man, dass ab dem zweiten Zug bei jedem Zug die größte der drei Zahlen verkleinert wird, und, weil keine der Zahlen negativ werden kann, muss nach endlich vielen Zügen eine Zahl 0 sein. Da 0 die Differenz der anderen beiden Zahlen ist, müssen diese gleich sein, es steht also 0, a, a auf der Tafel. Wegen $a-0=a$ und $a-a=0$ ist das der Endzustand, es ist kein Zug mehr möglich. Dieser Endzustand muss also jedenfalls erreicht werden. Sieger ist also, wer 0, a, a auf die Tafel schreibt.

Spielverlauf, wenn zu Beginn 2000, 17, 2017 auf der Tafel steht:

1. Zug (A): 2000, 17, 1983
2. Zug (B): 1966, 17, 1983
3. Zug (A): 1966, 17, 1949

usw. (wegen $2000:17=117{,}6\ldots$)

117. Zug (A): $2000-116\cdot 17=28$, 17, $2000-117\cdot 17=11$
118. Zug (B): 6, 17, 11
119. Zug (A): 6, 5, 11
120. Zug (B): 6, 5, 1
121. Zug (A): 4, 5, 1
122. Zug (B): 4, 3, 1
123. Zug (A): 2, 3, 1
124. Zug (B): 2, 1, 1
125. Zug (A): 0, 1, 1

und A gewinnt.

Aufgabe 4. Es scheint nahe liegend, dass Bob konsequent eine Spiegel-Strategie verfolgen sollte, mit der er den Sieg von Alice immer verhindern kann. Nur welche? Die Summe der 44 Zahlen $1,2,\ldots,44$ beträgt 990. Deshalb hat die Summe der restlichen Zahlen $45,46,\ldots,88$ den Wert $990+44\cdot 44$. Damit ist jeder dieser zwei Summenwerte eine gerade Zahl. Weil 2017 eine Primzahl ist, sollte Bob folgendermaßen vorgehen:

- Wenn Alice eine Zahl $x\leq 44$ wählt, wählt Bob die Zahl $x+44$.
- Wenn Alice eine Zahl $x>44$ wählt, wählt Bob die Zahl $x-44$.

Bei Einhaltung dieses Vorgehens muss Alice immer einen Summenwert der Art $990+44\cdot k$ erhalten, wobei der Faktor k angibt, wie viele Zahlen Alice gewählt hat, die größer als 44 sind. Weil alle dieser Werte gerade sind, verliert Alice immer.

Bemerkung. Jede der vier Aufgaben lässt Erweiterungen in verschiedene Richtungen zu.
Am Schluss dieses Beitrages bitte ich Sie, interessierte und begabte Schülerinnen und Schüler auf die *mathematische Olympiade* hinzuweisen und zur Teilnahme zu ermuntern [1]. Insbesondere verweise ich auf die sehr informative Seite `https://www.math.aau.at/OeMO/`, die vielfältigste Materialien bereithält.

Walther Janous

[1] Übrigens ist das österreichische Team von der diesjährigen internationalen Mathematikolympiade (IMO) in Rio de Janeiro mit zwei Silbermedaillen und ebenso vielen Ehrenden Erwähnungen heimgekehrt.