Österreichische
Mathematische
Gesellschaft

MATHE-BRIEF

Juni 2017 — Nr. 80

Herausgegeben von der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft
http: // www.oemg.ac.at / Mathe–Brief ——— mathe–brief@oemg.ac.at

Die Mandelbrotmenge

Komplexe Zahlen werden im Mathematiklehrbuch von GÖTZ/REICHEL/MÜLLER/HANISCH für die 7. Klasse eingeführt. Im folgenden stützen wir uns auf die dort angeführten Beziehungen und Bezeichnungen, mit einer zusätzlichen Schreibweise: für eine komplexe Zahl z auf dem Einheitskreis, die also den Absolutbetrag $|z| = 1$ hat und in Polarkoordinaten geschrieben wird als $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$, verwenden wir die Schreibweise $z = e^{i\varphi}$. Diese Schreibweise hat ihren guten Grund: das Produkt zweier solcher Zahlen berechnet sich zu

$$\begin{aligned}
e^{i\varphi} \cdot e^{i\psi} &= (\cos\varphi + i\sin\varphi)\cdot(\cos\psi + i\sin\psi) \\
&= (\cos\varphi \cdot \cos\psi - \sin\varphi \cdot \sin\psi) + i(\cos\varphi \cdot \sin\psi + \sin\varphi \cdot \sin\psi) \\
&= \cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi) \\
&= e^{i(\varphi+\psi)},
\end{aligned}$$

wie es sich für eine Exponentialfunktion gehört.

Die *Mandelbrotmenge* lässt sich beschreiben als eine Untermenge der komplexen Zahlenebene $\mathbb{C}$, die zusammenhängt mit der Iteration des komplexen quadratischen Polynoms $f(z) = z^2 - c$ (dabei ist c eine komplexe Zahl und z eine komplexe Variable).

Iteration bedeutet hier, dass zu einer gegebenen komplexen Zahl z_0 eine Folge $\{z_k\}_{k=0}^{\infty} = \{z_0, z_1, \cdots, z_k, \cdots\}$ konstruiert wird durch die Vorschrift $z_{k+1} = f(z_k) = z_k^2 - c$. Aus diesem Grunde schreibt man auch $z_k = f^{(k)}(z_0)$ und nennt diese Folge die *Bahn des Punktes* z_0. Die Mandelbrotmenge M ist definiert als die Menge aller komplexen Zahlen c, für die die Folge $\{f^{(k)}(0)\}_{k=0}^{\infty}$ beschränkt ist, d.h. innerhalb eines Kreises um den Koordinatenursprung mit passendem Radius liegt. Die ersten drei Glieder dieser Folge sind $z_0 = 0$, $z_1 = -c$, $z_2 = c(c-1)$.

Diese Definition sagt natürlich noch kaum etwas über die Form der Mandelbrotmenge, die in der Tat etwas kompliziert ist. Um einen Einblick zu gewinnen, verwenden wir den folgenden Hilfssatz:

Wenn für ein positives ε *der Absolutbetrag* $|z| \geq 2+\varepsilon$ *und* $|z| \geq |c|$ *ist, dann gilt* $|f(z)| \geq (1+\varepsilon)|z|$ *und* $\lim_{k\to\infty} |f^{(k)}(z)| = \infty$.

Der Beweis ergibt sich aus den folgenden Abschätzungen:

$$\begin{aligned}
|f(z)| &= |z(z-\frac{c}{z})| \\
&= |z||z-\frac{c}{z}| \\
&\geq |z|(|z|-\left|\frac{c}{z}\right|) \\
&\geq |z|(|z|-1) \\
&\geq (1+\varepsilon)|z| > |z|. \qquad \text{also} \\
|f^{(k)}(z)| &\geq (1+\varepsilon)^k|z| \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty
\end{aligned}$$

Falls $|c| = 2+\varepsilon$ ist, wenden wir diesen Hilfssatz auf $f(0) = -c$ an und erhalten $|f^{(k)}(0)| = |f^{(k-1)}(-c)| \geq (1+\varepsilon)^{k-1}|c|$ und daher $\lim_{k\to\infty}|f^{(k)}(0)| = \infty$. Damit haben wir erkannt:

(A) Die Mandelbrotmenge ist enthalten in einem Kreis um den Ursprung mit dem Radius 2.

Dieser Radius lässt sich auch nicht verkleinern, da $f(2) = 2$, d.h. 2 ein Fixpunkt für f ist und die Folge $\{f^{(k)}(2)\}_{k=0}^{\infty}$ konstant, also auch beschränkt ist. Damit haben wir schon einen Punkt der Mandelbrotmenge kennen gelernt. Genauer können wir sogar sagen, dass für eine reelle Zahl c, die $-\frac{1}{4} \leq c \leq 2$ erfüllt, jedenfalls wieder $f(-c) = f(c) = c(c-1) \in [-\frac{1}{4}, 2]$ gelten muss:

$$-\frac{1}{4} \leq c^2 - c = (c-\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} \leq \frac{9}{4} - \frac{1}{4} = 2$$

Die Bahn des Punktes 0 ist in diesem Falle also jedenfalls im Intervall $[-\frac{1}{4}, 2]$ enthalten und damit beschränkt. Andrerseits folgt aus $c = -\frac{1}{4} - \varepsilon$ für $k \geq 1$, dass

$$z_{k+1} = f^{(k+1)}(0) = f^{(k)}(-c) = z_k^2 + \frac{1}{4} + \varepsilon = (z_k - \frac{1}{2})^2 + z_k + \varepsilon \geq z_k + \varepsilon = f^{(k)}(0) + \varepsilon.$$

Weil $z_2 = f^{(1)}(-c) = (-c)(1-c) > \varepsilon > 0$ ist, folgt weiter $z_3 = \geq 2\cdot\varepsilon$ usw., d.h. $f^{(k+1)} \geq k\cdot\varepsilon$. Also kann c nicht mehr zu M gehören.

(B) Der Durchschnitt der Mandelbrotmenge mit der reellen Achse ist das Intervall $[-\frac{1}{4}, 2]$.

Wenn schließlich der Realteil $\Re(c)$ kleiner als -1 ist, folgt $|c| > 1$ und $|c-1| > 2$ und damit $|f(-c)| = |c||c-1| > 2$. Nach unserem Hilfssatz kann dann die Folge $\{f^{(k)}(0)\}_{k=0}^{\infty}$ nicht mehr beschränkt sein.

(C) Die Elemente der Mandelbrotmenge haben Realteil größer oder gleich -1.

Das Verhalten der Folge $\{f^{(k)}(0)\}_{k=0}^{\infty}$ lässt sich an folgendem Beispiel illustrieren: Es sei $\varphi \in [0, 2\pi]$ beliebig gewählt und $c = \frac{e^{2i\varphi}}{16} - \frac{e^{i\varphi}}{4}$, sowie $|z - \frac{e^{i\varphi}}{4}| < \frac{1}{4}$, d.h. z liegt innerhalb eines Kreises mit dem

Mittelpunkt $\frac{e^{i\varphi}}{4}$ und Radius $\frac{1}{4}$. Dann folgt

$$\begin{aligned}
f(\frac{e^{i\varphi}}{4}) &= \frac{e^{2i\varphi}}{16} - \frac{e^{2i\varphi}}{16} + \frac{e^{i\varphi}}{4} \\
&= \frac{e^{i\varphi}}{4} \qquad (\text{d.h. } \frac{e^{i\varphi}}{4} \text{ ist Fixpunkt der Funktion } f) \\
|z + \frac{e^{i\varphi}}{4}| &\leq |z - \frac{e^{i\varphi}}{4}| + |\frac{e^{i\varphi}}{2}| < \frac{3}{4} \\
|f(z) - \frac{e^{i\varphi}}{4}| &= |z^2 - \frac{e^{2i\varphi}}{16} + \frac{e^{i\varphi}}{4} - \frac{e^{i\varphi}}{4}| \\
&= |z + \frac{e^{i\varphi}}{4}||z - \frac{e^{i\varphi}}{4}| \leq \frac{3}{4}|z - \frac{e^{i\varphi}}{4}| \\
|f^{(k)}(z) - \frac{e^{i\varphi}}{4}| &\leq \left(\frac{3}{4}\right)^k \cdot \frac{1}{4} \xrightarrow{k\to\infty} 0,
\end{aligned}$$

d.h. alle komplexen Zahlen, deren Abstand vom Fixpunkt $\frac{e^{i\varphi}}{4}$ kleiner als $\frac{1}{4}$ ist, haben unter Iteration von f eine gegen diesen Fixpunkt konvergente Bahn, die deshalb auch beschränkt ist. Zu diesen Zahlen gehört auch $f^{(2)}(0) = f(-c)$, da

$$\begin{aligned}
f(-c) = c^2 - c &= (\frac{e^{4i\varphi}}{16^2} - \frac{e^{3i\varphi}}{32} + \frac{e^{2i\varphi}}{16}) - (\frac{e^{2i\varphi}}{16} - \frac{e^{i\varphi}}{4}) \\
|f(-c) - \frac{e^{i\varphi}}{4}| &\leq \frac{1}{256} + \frac{1}{32} < \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Also liegt auch diese komplexe Zahl c (für jedes reelle φ) in M. Im allgemeinen gibt es aber auch Bahnen, die beschränkt sind, ohne zu konvergieren.

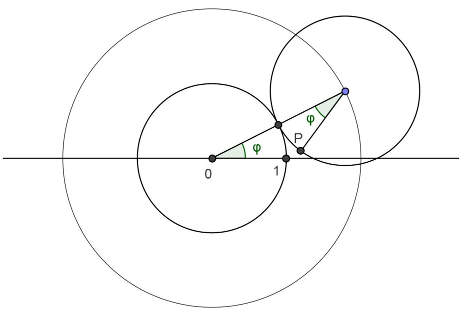

ABBILDUNG 1

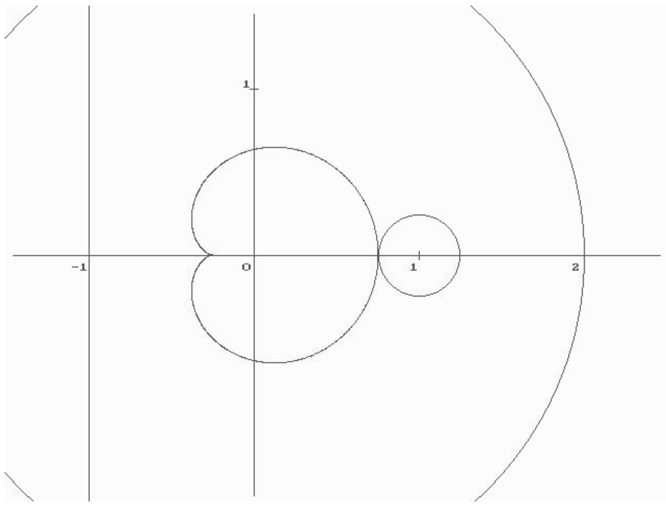

ABBILDUNG 2

Tatsächlich lässt sich mit entsprechendem Aufwand noch wesentlich mehr beweisen: Für $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ beschreibt der komplexe Punkt $u(\varphi) = 2e^{i\varphi} - e^{2i\varphi}$ eine Cardioide, d.h. die Kurve, die von einem Umfangspunkt P eines Kreises mit Radius 1 beschrieben wird, der auf einem Kreis mit Radius 1 und Mittelpunkt im Ursprung abrollt, und zwar von dem Punkt, in dem die beiden Kreise sich im Punkt 1 für $\varphi = 0$ berühren (Figur 1).

Zu M gehören auch alle Punkte, die von der um 180 Grad gedrehten und vom Ursprung aus auf ein Viertel verkleinerten Cardioide $v(\varphi) = -u(\varphi)/4$ eingeschlossen werden, ebenso alle Punkte der Kreisscheibe mit dem Radius $\frac{1}{4}$ und dem Mittelpunkt im Punkt 1. Im Groben lässt sich daraus bereits erkennen, warum die Mandelbrot-Menge auch den Namen „Apfelmännchen“ bekommen hat (Figur 2).

Ein befriedigendes Bild der Mandelbrotmenge liefert allerdings erst ein Computer mit folgendem Trick: Punkte, die nicht zur Mandelbrotmenge gehören, haben Bahnen, die divergieren und deshalb irgendwann den Kreis mit dem Radius 2 und dem Mittelpunkt im Ursprung verlassen. Wir sagen, dass die Fluchtzeit so eines Punktes die ganze Zahl k ist, wenn $f^{(k-1)}(z)$ noch in diesem Kreis liegt, aber $f^{(k)}(z)$ bereits nicht mehr (nach unserem Hilfssatz kommt er auch nie mehr in diesen Kreis zurück). Den Punkten außerhalb diese Kreises ordnen wir die Fluchtzeit 0 zu. Wir können dem Computer, der ja von jedem Punkt z beliebig viele Bahnpunkte ohne große Probleme berechnen kann, nun auftragen, für jedes Bildschirmpixel und die entsprechende komplexe Zahl zu ermitteln, ob ihre Fluchtzeit 100 übersteigt (was ein Indiz dafür ist, dass ihre Bahn doch im Kreis mit Mittelpunkt 0 und Radius 2 bleibt), und diese Punkte dann als zu M gehörig einfärben. Damit nehmen wir in unsere Approximation von M zwar Punkte mit unbeschränkter Bahn auf, die eine endliche, aber 100 übersteigende Fluchtzeit haben, aber das beeinflußt das Bild von M nur wenig und kann notfalls durch eine Erhöhung dieser Fluchtzeitgrenze noch verbessert werden (Figur 3). Eine zusätzliche Ausschmückung des Bildes erhalten wir, wenn wir Punkte, deren Fluchtzeiten modulo 16 kongruent sind, mit einer der 16 leicht verfügbaren Farben einfärben (Figur 4).

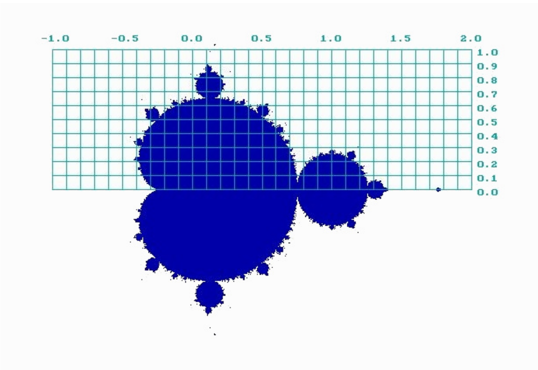

ABBILDUNG 3

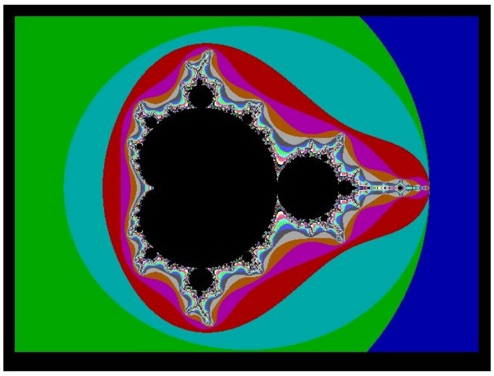

ABBILDUNG 4

Die Mandelbrotmenge ist eine *fraktale* Menge in dem Sinn, dass ihrem Rand eine mathematische Dimension zwischen 1 und 2 zuerkannt werden muss. Bahn-Perioditätseigenschaften charakterisieren die Serie von Knospen, die sich an den Hauptkörper anschließen. Wenn man in Randgebiete hinein-zoomt, besonders in der Nähe von gegenseitigen Berührungspunkten dieser Knospen, erschließt das eine Welt fantastischer Ornamente – Beispiele zeigt das Buch [PEITGEN ET AL. 1998].

Die Bedeutung der Mandelbrot-Menge liegt aber in Folgendem: Zu jedem Parameter-Wert $c \in \mathbb{C}$ gehört ein „Anziehungsbereich des Unendlichen“, d.h. die Menge aller $z \in \mathbb{C}$, deren Bahn unbeschränkt ist. Nach unserem Hilfssatz gehören dazu sicher alle komplexen Zahlen z ausserhalb eines Kreises um den Ursprung mit dem Radius $\max(2, |c|)$. Der Rand J_c dieser Menge ist kompakt, nirgends dicht, perfekt (d.h. J_c enthält keine isolierten Punkte) und invariant unter der Funktion

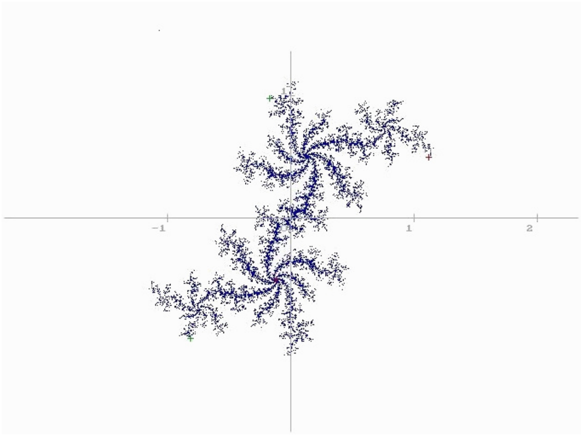

ABBILDUNG 5. Julia-Menge für $c = -0,1103 + 0,63i \in M$.

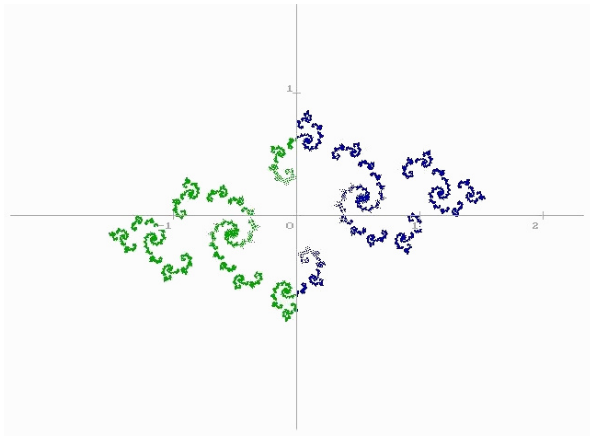

ABBILDUNG 6. Julia-Menge für $c = 0,8 + 3i \notin M$.

f (d.h. $f^{-1}(J_c) = J_c$). Die Menge J_c ist nicht leer (d.h. es gibt immer Punkte mit beschränkter Bahn), sie kann alternativ auch durch Periodizitätseigenschaften der Funktion f definiert werden und heißt die zu c gehörige *Julia-Menge*. Ihre Gestalt ist wesentlich durch die Lage von c zur Mandelbrotmenge M bestimmt. Beispielsweise ist sie zusammenhängend, wenn $c \in M$, aber vollständig unzusammenhängend, wenn $c \notin M$. Insoferne liefert die Mandelbrotmenge einen Katalog aller dieser Julia-Mengen. Den Reichtum dieser mathematisch definierten ästhetischen Wunderwerke, von denen die Figuren 5 und 6 Beispiele zeigen, illustrieren Abbildungen in [PEITGEN ET AL. 1998].

Literatur

BARNSLEY, M.: *Fractals Everywhere.* Academic Press, Inc., Toronto 1988.

EDGAR, G.A. *Measure, Topology, and Fractal Geometry*. Springer, Berlin – New York 1990.

GÖTZ, S., REICHEL, H.-C., MÜLLER, R., HANISCH, G.: *Mathematik-Lehrbuch 7* öbvhpt Verlagsgesellschaft, Wien 2006.

HELMBERG, G.: *Getting Acquainted with Fractals.* DeGruyter, Berlin – New York 2007.

MANDELBROT, B. B.: *Fractals: Form, Chance, and Dimension.* W. H. Freeman and Co., New York 1977.

MANDELBROT, B. B.: *The Fractal Geometry of Nature.* W. H. Freeman and Co., New York 1982. Deutsche Ausgabe:*Die fraktale Geometrie der Natur.* Birkhäuser Verlag, Basel 1991.

PEITGEN, H.-O., JÜRGENS, H., SAUPE, D.: *Fractals for the Classroom.* Part One:*Fractals.* Part two: *Complex Systems and Mandelbrot Set.* Springer Verlag, Berlin 1992. Deutsche Ausgabe des ersten Teiles: *Bausteine des Chaos. Fraktale.* RoRoRo, Hamburg 1998.

ZEITLER, H., PAGON, D.: *Fraktale Geometrie. Eine Einführung.* Vieweg, Braunschweig 2000.

Gilbert Helmberg