Österreichische Mathematische Gesellschaft

MATHE-BRIEF

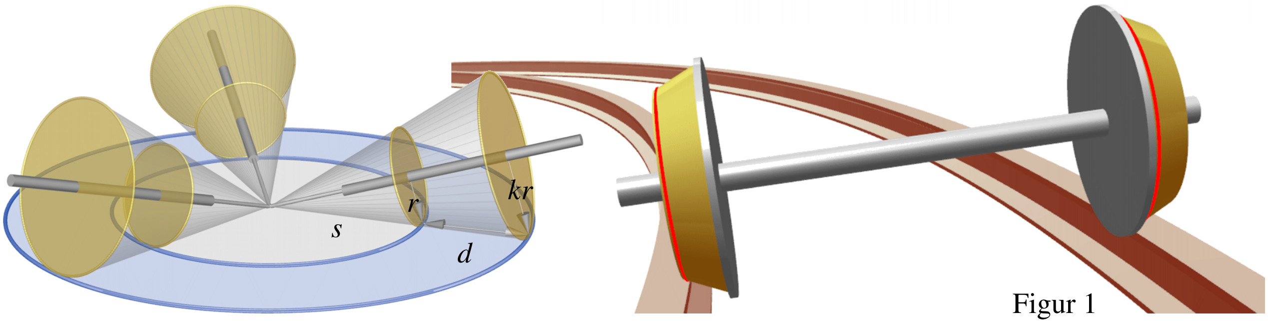
März 2017 — Nr. 77

Herausgegeben von der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft
http://www.oemg.ac.at/Mathe–Brief ——— mathe–brief@oemg.ac.at

DREI SCHEINBAR EINFACHE FRAGEN

Im folgenden wollen wir ein bisschen fächerübergreifende Mathematik betreiben. Die zumeist technisch-physikalischen Fragestellungen sind klar und einfach, Lösungen sind im Internet leicht zu finden, aber sie greifen meist zu wenig tief. Hier helfen durchaus einfach nachvollziehbare mathematische Überlegungen.

1. Warum entgleist ein Zug nicht?
Wenn etwas „wie auf Schienen“ läuft, kann nichts mehr passieren. Aber warum bleibt ein Zug so stabil auf Schienen, auch wenn es um die Kurve geht?



Figur 1

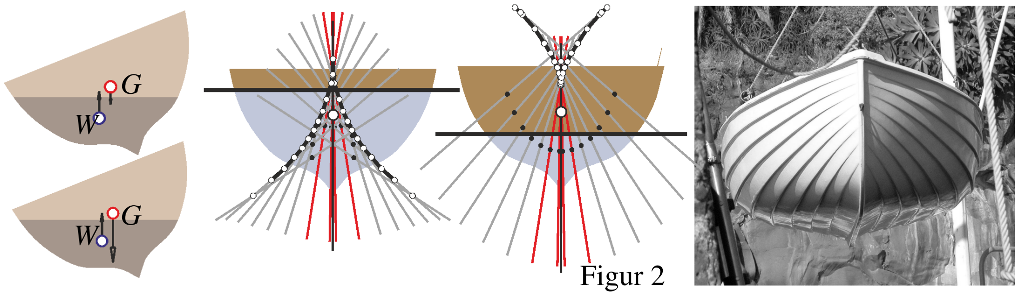
Betrachten wir dazu eine einleitende Skizze (Fig. 1, links), wo ein Kegel auf einer horizontalen Ebene rollt. Zwei beliebige Schichtenkreise liefern als Abdruckspur konzentrische Kreise. Stupst man so eine unsymmetrische Hantel z.B. in der rechten Position an, macht diese sofort eine Drehbewegung nach links. Vergleicht man nun mit der rechten Bildhälfte, erkennt man folgendes: Wenn die Räder des Zugs, wie angegeben konisch *nach außen* sind (Kegelspitze außerhalb der Schienen), könnten sich die Radien der Berührkreise mit der Schiene genauso ändern, dass der „Hanteltrick“ funktioniert.
Nun kommt aber der Clou: Kaum bricht der Zug nur geringfügig *nach rechts* aus, vergrößert sich rechte Radius und verkleinert sich der linke. Das bewirkt eine augenblickliche Korrekturbewegung *nach links*. In die andere Richtung funktioniert es genauso, sodass dem Zug gar nichts anderes übrigbleibt, als exakt „auf Schiene zu bleiben“ – ohne Computersteuerung.

Wer als Mathematiker auch ein bisschen rechnen will: Sind r und $k \cdot r$ die Radien der Kreise und s und d die Erzeugendenlängen (auf dem Kegel) wie in der Skizze, dann gilt nach dem Strahlensatz $s : r = (d+s) : (kr)$ und folglich $s = d/(k-1)$. Der Krümmungsradius s der Schiene hängt also vom Verhältnis der beiden Kreisradien ab. Für $k = 1$ $(k-1 = 0)$ (d.h. wenn der Zug geradeaus fährt) sind die Schienen nicht gekrümmt.
Anmerkung: Der Stahlkranz, den die Räder zur Sicherheit haben, ist nur für den absoluten Notfall

eines abrupten seitlichen Schlages nötig, oder kann vielleicht unterstützend eingreifen, wenn ein Zug zu schnell in eine nicht genügend geneigte Kurve fährt (Fliehkräfte!).

2. Warum sinkt ein Schiff nicht?

Seit Archimedes wissen wir: Der Auftrieb ist gleich dem Gewicht der verdrängten Flüssigkeit. Jeder Körper, der eine Dichte hat, die kleiner als Wasser ist, bleibt an der Oberfläche. Nun bestehen Schiffe aber oft aus einem Stahlmantel, und sie haben u.U. tausende Container an Bord. Allerdings sind solche Schiffe hunderte Meter lang, fünfzig Meter breit und haben einen Tiefgang von 15 m. Aber: Ein Schiff sinkt ja meistens nicht bei ruhiger See. Was passiert, wenn ein Schiff Schräglage bekommt?

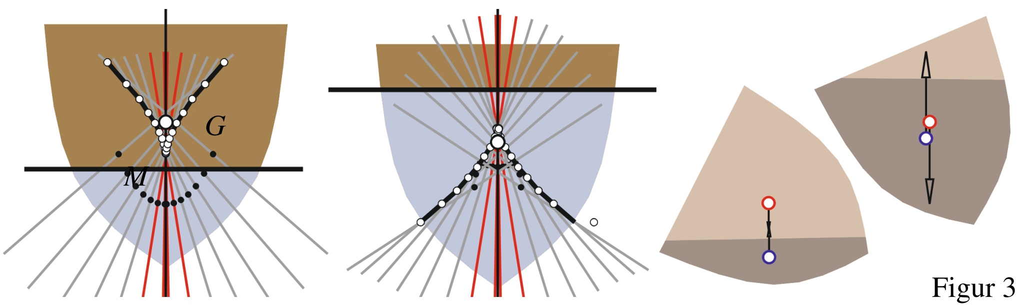


Figur 2

Betrachten wir einmal das klassische Schiffsprofil (Fig. 2). Links sieht man, welche Kräfte wirken: Das Gewicht, das im Schwerpunkt G ansetzt, und der Auftrieb, der im Schwerpunkt W des verdrängten Wassers ansetzt. Bei ruhiger See sinkt das Schiff soweit ein, bis beide Kräfte gleich groß sind. Ist das Schiff symmetrisch beladen, liegen W und G übereinander. Wenn das Schiff schwankt, ändert sich i. Allg. nur die Position von W und die Größe des Auftriebs. Die beiden Kräfte erzeugen bei Schräglage ein Drehmoment. Ist das Profil gut gewählt – eben so, wie das bei Schiffen gemacht wird –, richtet sich das Schiff dabei auf.

Wie kann man nun so ein Profil mathematisch testen?

Wenn das auftretende Drehmoment das Schiff aufrichten soll, muss die „Auftriebsgerade“ a so am Schwerpunkt G des Querschnitts vorbei gehen, dass G unterhalb von a liegt. Das aufrichtende Drehmoment ist proportional zum Normalabstand $\overline{aG}$. Betrachten wir nun eine Serie von aufeinander folgenden Schräglagen und tragen die jeweilige Auftriebsgerade im „Querschnitts-System“ ein. Dort haben wir dann eine Serie von Geraden, die eine Kurve einhüllen. Diese *Metakurve* hat auf der Symmetrale des Querschnitts einen Scheitel. Weil die Auftriebsgerade in Nicht-Schräglage mit der Symmetralen übereinstimmt, hat die Kurve dort eine Spitze (das Metazentrum M). Dieses muss nach obigen Überlegungen auf jeden Fall über G liegen, und zwar möglichst weit, damit für alle Kurventangenten – bis zu einem maximalen Neigungswinkel – G immer auf der richtigen Seite liegt. Fig. 2 (klassisches Schiffsprofil) zeigt, dass sowohl bei großer Beladung (zweites Bild von links) als auch bei geringer Beladung (3. Bild von links) die genannte Bedingung gut erfüllt ist.

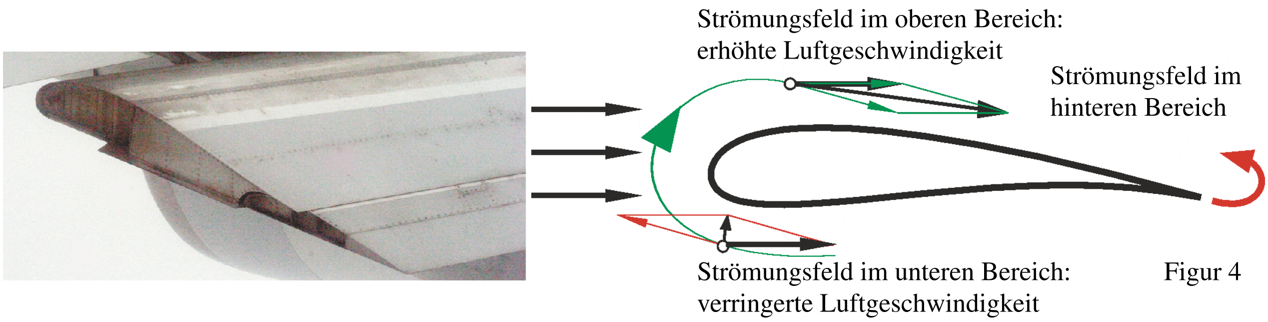


Figur 3

In Fig. 3 ist die Sache keineswegs mehr so klar. Ganz links sieht man ein nicht mehr so günstiges Profil, das bei geringer Beladung große Probleme bekommen würde und letztendlich, wie im zweiten Bild von rechts, in gekippter Lage ins Gleichgewicht käme. Das 2. Bild von links illustriert, dass die Angelegenheit durch starke Beladung zumindest verbessert werden könnte. Die prognostizierte Endlage (ganz rechts) ist aber auch zweifelhaft.
Um stabiler zu werden, verwenden große Schiffe Stabilisatoren, und viele pumpen bei geringer Beladung auch Wasser in den unteren Bereich (letzteres ist allerdings langfristig ein Problem, weil dadurch Mikroorganismen globalisiert werden).

3. Warum fliegt ein Flugzeug?

Auch hier lohnt sich ein genauerer Blick, zumal die Antworten im Internet sehr vereinfachend sind. Das Tragflächenprofil (bei schnelleren Flugzeugen meist nahezu symmetrisch, bei langsamen nach oben gekrümmt) hat hinten eine scharfe Kante.



Figur 4

Durch den speziellen Querschnitt des Tragflügels gelingt es, ein Strömungsfeld zu erzeugen, das an der Oberseite einen geringeren und an der Unterseite einen höheren Luftdruck erzeugt.
Man kann sich zu diesem Zweck ein Luft-Element als elastischen Körper vorstellen, wo während einer Bewegung die potentielle Energie durch den Luftdruck und die kinetische Energie in Summe konstant bleiben ($\rho v^2/2 + p = \text{const}$, Gesetz von Beroulli).
Wenn man eine laminare Umströmung des Profils annimmt – also keine Vernichtung von Energie durch Turbulenzen – entsteht damit auf paradoxe Weise dort ein Unterdruck, wo die Strömungsgeschwindigkeit hoch ist. Die Geschwindigkeit wiederum kann man durch die Form des Profils steuern.

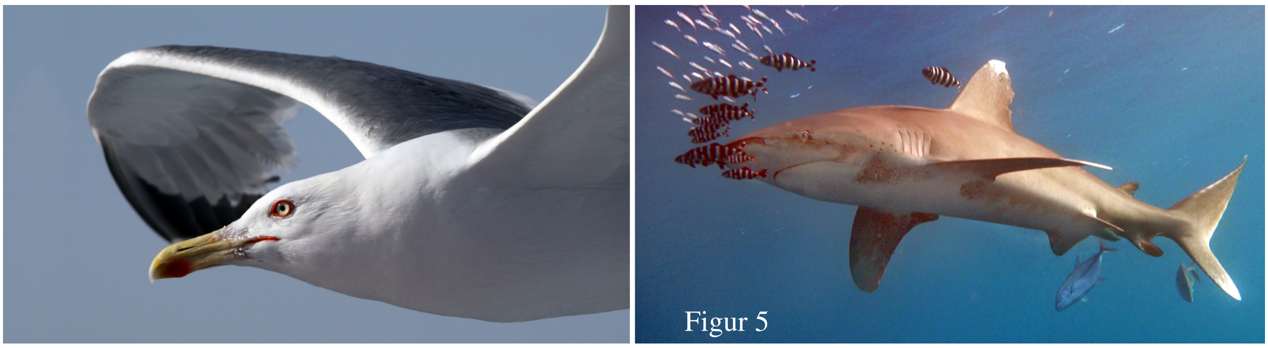
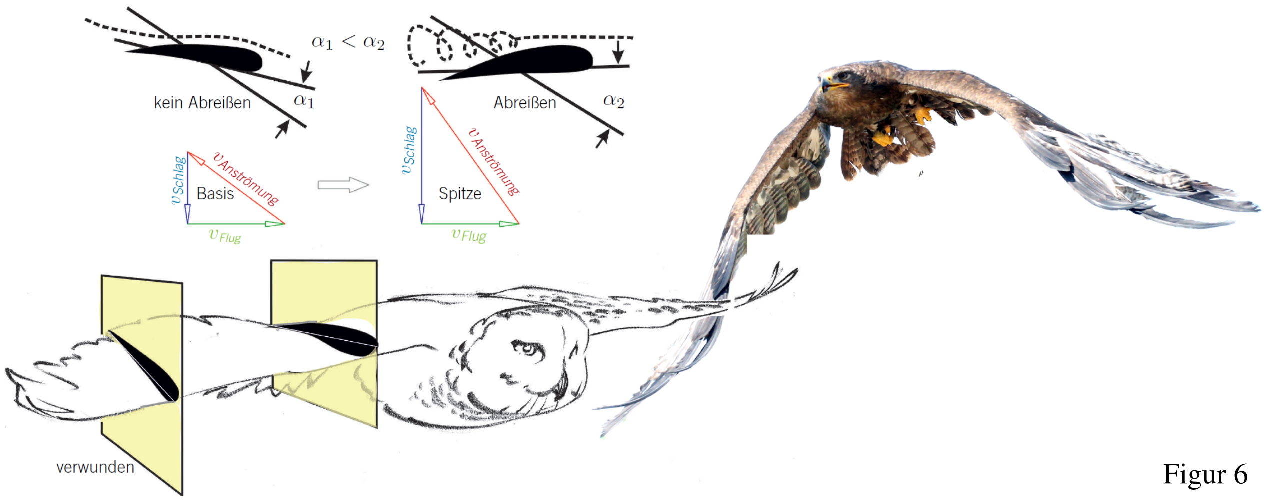

Figur 5

Fig. 5 zeigt einen Vogelflügel und die Seitenflosse eines Hais. Der Mechanismus, mit welchem Auftrieb erzeugt wird, ist bei Hochseehaien, die schwerer als das Wasser sind, ganz analog zu einem Flugzeug: der Hai „fliegt“ im Fluid Wasser. Auch bei Flugtieren wie Vögeln oder Fledermäusen mit viel aktiver bewegten Flügeln lässt sich die hinten zugespitze Form der „Tragflächen“ beobachten.



Figur 6

Das im Flugbetrieb gefürchtete Abreißen der Strömung (unter Bildung gefährlicher Wirbel im oberen Bereich) wäre auch für Flugtiere ein Problem. Fig. 6 zeigt, wie Vögel ihre Flügel verwinden, um entlang des gesamten Flügels Auftrieb zu erhalten. Die äußeren Flügelteile bewegen sich ja – bei gleichbleibender Vorwärtsgeschwindigkeit v_{Flug} mit größerer Geschwindigkeit v_{Schlag} abwärts. Der Anströmungsvektor ändert entlang des Flügels somit seine Richtung, was durch die Verwindung ausgeglichen wird, um den Anstellwinkel α einigermaßen konstant und klein zu halten.

Georg Glaeser

LITERATUR

[1] G. Glaeser: Der mathematische Werkzeugkasten. Anwendungen in Natur und Technik (4.Aufl.). Springer Spektrum Heidelberg, 2014

[2] G. Glaeser, H.F. Paulus, W. Nachtigall: Die Evolution des Fliegens. Ein Fotoshooting. Springer Spektrum Heidelberg, 2017