Österreichische
Mathematische
Gesellschaft

MATHE-BRIEF

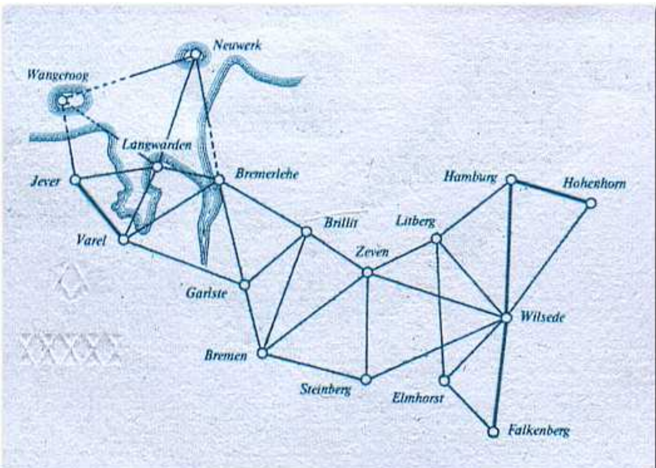
Jänner 2017 — Nr. 75

Herausgegeben von der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft
http: // www.oemg.ac.at / Mathe–Brief ——— mathe–brief@oemg.ac.at

Erdvermessung und Winkelsummen auf der Kugel

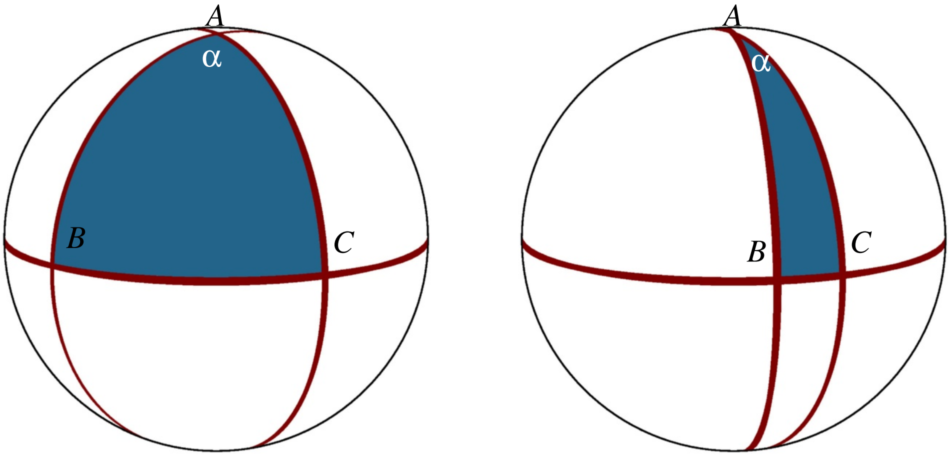
Die Vermessung der Erde musste lange Zeit durch präzises und mühevolles Vermessen von Dreiecken erfolgen, wobei die Größe solcher Dreiecken von einigen Metern bis zu mehr als 100 Kilometern reichen kann. Die Vermessung der Welt ist eng mit dem Fortschritt der Geometrie und der Mathematik verknüpft: Bereits im alten Ägypten, wo durch die jährlichen Überschwemmungen des Nils regelmäßig Neuvermessungen stattfinden mussten, war beispielweise bekannt, dass ein Dreieck mit den Seiten 3, 4 und 5 rechtwinkelig ist.

Überspringen wir mehr als 2000 Jahre, so gelangen wir zur 1818 bis 1826 durchgeführten Landesvermessung des Königreichs Hannover, die von keinem Geringeren als Carl Friedrich Gauß durchgeführt wurde, und der dabei unter anderem durch Visieren zwischen Bergspitzen sein berühmtes *großes Dreieck* vermaß: Es hatte die Seitenlängen 69 km (Hoher Hagen — Brocken), 84 km (Hoher Hagen — Inselsberg) und 106 km (Brocken — Inselsberg). Als die Bundesrepublik Deutschland Carl Friedrich Gauß auf dem Zehnmarkschein ein Denkmal setzte, wurde auch seiner Vermessungstätigkeit gedacht: Man konnte auf der Rückseite des Geldscheins (bevor er durch die Einführung des Euro aus dem Verkehr gezogen wurde) ganz rechts unten ein Detail des damaligen Triangulationsnetzes erkennen:



Bei Dreiecken dieser Größe spielt die Erdkrümmung bereits eine Rolle: Stellt man sich zwei 100 km in direkter Luftlinie entfernte Bergspitzen A und B auf zwei Inseln vor, die beide 200 m hoch sind, so würde die geradlinie Verbindung aufgrund der Wölbung der Erde fast den Meeresspiegel berühren.[1] Ab einem gewissen Ausmaß der vermessenen Gebiete hat es daher keinen Sinn mehr, Dreiecke mit geradlinien Seiten zu betrachten, und wir interessieren uns für Dreiecke auf der Oberfläche einer Kugel. Die Seiten solcher Kugeldreiecke sind die *kürzesten Verbindungen* zwischen den Eckpunkten A, B und C. Jede solche kürzeste Verbindung, z.B. zwischen A und B, ist ein Großkreisbogen, der aus der Kugel durch die Ebene ABM ausgeschnitten wird (M ist der Kugelmittelpunkt).

Nähert man die Form der Erde durch eine Kugel an, so sind die Meridiankreise solche Großkreisbögen, und auch der Äquator ist ein Großkreis. Das folgende Bild zeigt ein Kugeldreieck, dessen Ecken A, B und C aus dem Nordpol A und zwei Punkten B,C auf dem Äquator gebildet werden.



Die Winkel bei den Ecken B und C betragen beide 90°. Die Winkelsumme in diesem Kugeldreieck ist daher $180° + \alpha$, also größer als 180° (je nachdem, wie groß der Winkel α bei A ist). Wir sehen, dass sich die Geometrie auf einer Kugel in einigen Belangen anders verhält als die Geometrie in der Ebene.[2] Der Flächeninhalt eines solchen Kugeldreiecks ist offenbar proportional zum Winkel α — Bei $\alpha = 90°$ bzw. 180° bzw. 360° bedeckt das Dreieck ein Achtel bzw. ein Viertel bzw. die Hälfte der Kugeloberfläche. Dieser Zusammenhang zwischen Winkel und Fläche ist ein Spezialfall einer erstaunlichen Beziehung:

> *Hat ein Kugeldreieck auf einer Kugel mit Radius r den Flächeninhalt F, so gilt für die Summe der drei Winkel α, β und γ (im Bogenmaß) die Gleichung*
>
> $$\alpha + \beta + \gamma = \pi + F/r^2.$$

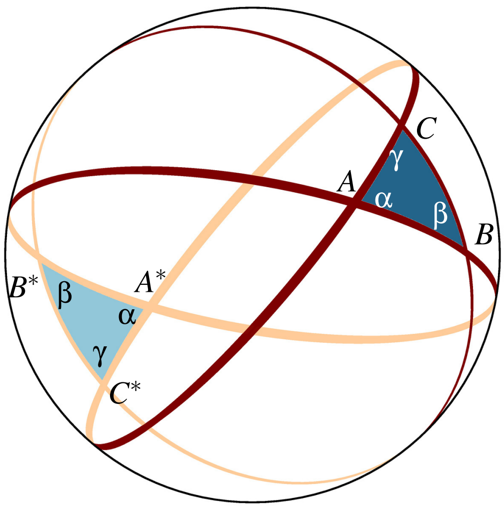
Die Winkelsumme hängt also vom Flächeninhalt ab und umgekehrt. Der Überschuss der Winkelsumme über 180 Grad (der *sphärische Exzess*) ist direkt propertional zum Flächeninhalt. Man beachte, dass hier die Winkel zwischen Großkreisen gemessen werden, und nicht zwischen den geradlinien Verbindungen der Ecken (welche im Inneren der Kugel verlaufen würden).

---

[1] Angenommen, die Verbindung AB berührt im Mittelpunkt C der Strecke AB genau die Meeresoberfläche. Ist M der Erdmittelpunkt, so bilden die Punkte M,C,A ein rechtwinkeliges Dreieck mit $\overline{AC} = 50\,\text{km}$ und $\overline{MC} \approx 6371\,\text{km}$, dem mittleren Erdradius. Die Höhe von C über dem Meer ist nun durch $\overline{MA} - \overline{MC} = \sqrt{6371^2 + 50^2} - 6371 = 0.196\,\text{km} \approx 200\,\text{m}$ gegeben.

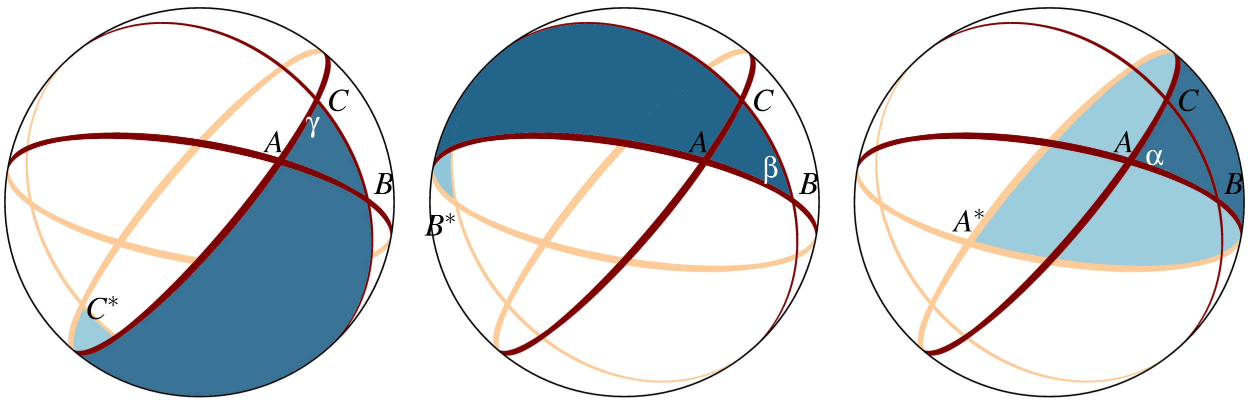
[2] Dies ist auch der Grund, warum es keine Landkarten gibt, die (bis auf einen konstanten Maßstab) längentreu sind.

Wir wollen die Beziehung $\alpha+\beta+\gamma=\pi+F/r^2$ herleiten. Dies geschieht dadurch, dass wir für ein Kugeldreieck mit Ecken A, B und C die Großkreisbögen, die die Seiten AB, AC, BC tragen, jeweils zu einem ganzen Großkreis verlängern; diese Großkreise sind symmetrisch zum Kugelmittelpunkt und treffen einander außer in den Punkten A, B und C noch ein zweites Mal, nämlich in den A, B und C gegenüberliegenden Punkten A^*, B^* und C^*:



Die drei Großkreise zerlegen die Kugel in insgesamt acht Dreiecke. Der Trick bei der Flächenberechnung besteht nun darin, Paare von Dreiecken, zu je einem sogenannten Kugel-Zweieck zusammenzufassen, naemlich:

$ABC + ABC^*$ bzw. $ABC + AB^*C$ bzw. $ABC + A^*BC$



Wir erhalten Kugel-Zweiecke mit Ecken CC^* bzw. BB^* bzw. AA^*. Der Flächeninhalt eines solchen Zweiecks (z.B. zwischen C und C^*) hängt nur von dem Offnungswinkel bei den beiden Ecken (z.B. γ) ab. Der Flächeninhalt ist offenbar *proportional* zum Öffnungswinkel. Damit beim Öffnungswinkel 2π die gesamte Kugeloberfläche $4\pi r^2$ erhalten wird, muss der Proportionalitätsfaktor gleich $2r^2$ sein. Der Flächeninhalt der drei abgebildeten Zweiecke ist also gleich

$2\gamma r^2$ bzw. $2\beta r^2$ bzw. $2\alpha r^2$.

Die diesen Zweiecken gegenüberliegenden Zweiecke haben denselben Flächeninhalt; es sind dies

$$A^*B^*C^* + A^*B^*C \qquad \text{bzw.} \qquad A^*B^*C^* + A^*BC^* \qquad \text{bzw.} \qquad A^*B^*C^* + AB^*C^*.$$

Die obigen Überlegungen haben dazu geführt, dass wir zwar noch nicht den Flächeninhalt eines einzelnen Dreiecks kennen, aber immerhin viele *Summen* von Flächeninhalten. Man muss jetzt nur mehr die erhaltenen Gleichungen geschickt kombinieren. Wir beginnen mit dem Anschreiben aller bisher erhaltenen Relationen. Wir verwenden das Symbol F_{ABC} für den Flächeninhalt des Kugeldreiecks ABC.

$$\begin{aligned}
F_{ABC} &+ F_{ABC^*} = 2\gamma r^2 \\
F_{ABC} &+ F_{AB^*C} = 2\beta r^2 \\
F_{ABC} &+ F_{A^*BC} = 2\alpha r^2 \\
F_{A^*B^*C^*} &+ F_{A^*B^*C} = 2\gamma r^2 \\
F_{A^*B^*C^*} &+ F_{A^*BC^*} = 2\gamma r^2 \\
F_{A^*B^*C^*} &+ F_{AB^*C^*} = 2\alpha r^2.
\end{aligned}$$

Die verwendeten Großkreise zerschneiden die Kugel in acht Dreiecke, und jedes davon kommt auf der linken Seite vor; ABC und $A^*B^*C^*$ sogar dreimal. Summation über alle Flächeninhalte auf der linken Seite ergibt also die gesamte Kugelfläche, plus zwei Mal die überschüssigen Dreiecke ABC und $A^*B^*C^*$. Damit erhalten wir durch Addition der obigen sechs Gleichungen die Beziehung

$$4\pi r^2 + 2F_{ABC} + 2F_{A^*B^*C^*} = 4r^2(\alpha + \beta + \gamma).$$

Beachtet man nun die Flächengleichheit der Kugeldreiecke ABC und $A^*B^*C^*$ und kürzt man durch $4r^2$, so erhält man

$$\pi + F_{ABC}/r^2 = \alpha + \beta + \gamma,$$

was zu beweisen war.

Die Eigenschaften von Kugeldreiecken waren selbstverständlich für die Vermessungstätigkeiten von großer Bedeutung und waren daher bereits im 18. Jahrhundert bekannt. Carl Friedrich Gauß war der erste, der über die Kugel hinausging und systematisch die innere Geometrie allgemeinerer Flächen untersuchte – zu seiner Zeit wusste man schon, dass die Form der Erde in 2. Näherung durch ein abgeplattetes Ellipsoid beschrieben wird. Seine präzisen Aussagen zu dem Thema sind als der Integralsatz von Gauß-Bonnet und das sogenannte *theorema elegantissimum*[3] bekannt.

Johannes Wallner

[3] *Theorema elgantissimum* („eleganter Satz"): $(\alpha+\beta+\gamma-\pi)/F$ ist genau der Mittelwert der Gaußschen Krümmung K im betrachteten Dreieck, bzw. $\alpha+\beta+\gamma = \pi + \int K$.