Österreichische
Mathematische
Gesellschaft

MATHE-BRIEF

Dezember 2016 — Nr. 74

Herausgegeben von der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft
http: // www.oemg.ac.at / Mathe–Brief ——— mathe–brief@oemg.ac.at

EIN BEWÄHRTER WEG ZUR LÖSUNG EINFACHER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

In der Oberstufe verschiedener Schulen, vor allem im technischen Bereich, werden zu Recht Differentialgleichungen untersucht. Eine bewährte Methode ist es, ohne viele theoretische Betrachtungen formal zu arbeiten. Was heißt formal? Man verwendet Techniken, mit denen man darauf los rechnet, aber Fragen der Existenz oder Konvergenz einmal vergisst!

Führen wir daher den *Differentialoperator* $Df := f'$ ein, so können wir $y(x) = e^{\lambda x}$ als *Eigenfunktion* zum *Eigenwert* λ auffassen und schreiben: $Dy = \lambda y$ oder äquivalent $(D - \lambda\mathbf{1})y = 0$. Diese Form eignet sich für das Lösen mancher inhomogener Gleichungen

$$y'(x) - \lambda y(x) = s(x),$$

wo $s(x)$ als Störfunktion bezeichnet wird. Die Gleichung

$$(D - \lambda\mathbf{1})y = s$$

ist äquivalent zu

$$(\mathbf{1} - \frac{D}{\lambda})y = -\frac{s}{\lambda}.$$

Nun erinnern wir uns an die Summenformel für die geometrische Reihe! Bekanntlich gilt für $|z| < 1$ die Formel

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots$$

Warum soll man es dann nicht mit der Formel

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1} - \frac{D}{\lambda}} = \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{D}{\lambda})^n = \mathbf{1} + \frac{D}{\lambda} + \frac{D^2}{\lambda^2} + \dots$$

versuchen? Dies ergibt die formale Lösung

$$y = -\frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{D}{\lambda})^n s = -\frac{1}{\lambda}(s + \frac{s'}{\lambda} + \frac{s''}{\lambda^2} + \dots).$$

Aussicht auf Erfolg haben wir, wenn die Reihe rechts konvergiert. Dies ist sicher der Fall, wenn etwa $s^{(n+1)} = 0$ für ein $n \geq 0$ gilt, d.h. die Störfunktion ist ein Polynom

$$s(x) = A_0 + A_1 x + \dots + A_n x^n.$$

Ist etwa $s(x) = 1 + x^2$, dann liefert diese Formel die Lösung

$$y(x) = -\frac{1}{\lambda}\left(1 + x^2 + \frac{2x}{\lambda} + \frac{2}{\lambda^2}\right) = \frac{\lambda^2 x^2 + 2\lambda x + \lambda^2 + 2}{\lambda^3}.$$

Die Methode geht auch gut, wenn die Ableitungen der Störfunktion s beschränkt sind, etwa bei $s(x) = \sin x$. Dann ist

$$y(x) = -\frac{1}{\lambda}(\sin x + \frac{\cos x}{\lambda} - \frac{\sin x}{\lambda^2} - \frac{\cos x}{\lambda^3} + \cdots) = \frac{-\lambda \sin x - \cos x}{\lambda^2 + 1}.$$

Die Summierung der geometrischen Reihen erfordert eigentlich $|\frac{1}{\lambda}| < 1$, aber im Endergebnis kann λ beliebig sein und die angegebene Funktion ist, wie man durch Einsetzen bestätigt, Lösung der Differentialgleichung!

Genauso erfolgreich ist man mit $s(x) = e^{\mu x}$. Man erhält

$$y(x) = -\frac{e^{\mu x}}{\lambda}(1 + \frac{\mu}{\lambda} + \frac{\mu^2}{\lambda^2} + \cdots) = \frac{e^{\mu x}}{\mu - \lambda}.$$

Dies ist eine Lösung, wenn $\mu \neq \lambda$. Für $\lambda = \mu$ versagt diese Methode, aber ein Trick hilft weiter, denn

$$y(x) = \frac{e^{\mu x} - e^{\lambda x}}{\mu - \lambda}$$

ist für $\lambda \neq \mu$ ebenfalls eine Lösung. Setzen wir $\mu = \lambda + h$, so erhält man

$$\lim_{\mu \to \lambda} \frac{e^{\mu x} - e^{\lambda x}}{\mu - \lambda} = \lim_{h \to 0} \frac{e^{(\lambda + h)x} - e^{\lambda x}}{h} = xe^{\lambda x}.$$

Diese Funktion ist, wie man sich überzeugen kann, eine Lösung.

Eine andere Gleichung ist die Schwingungsgleichung

$$y''(x) + \omega^2 y(x) = 0.$$

Dies ist die Gleichung einer ungedämpften Schwingung. Die Einführung des Differentialoperators D legt einen ähnlichen Weg nahe. Man schreibe die Gleichung

$$y''(x) + \omega^2 y(x) = 0$$

in der Form

$$(D^2 + \omega^2 \mathbf{1})y = 0.$$

Mit Hilfe komplexer Zahlen, deren Nutzen sich hier wieder zeigt, ist aber

$$(D^2 + \omega^2 \mathbf{1})y = (D + i\omega \mathbf{1})(D - i\omega \mathbf{1})y = 0.$$

Daher sollte $(D + i\omega \mathbf{1})y = 0$ oder $(D - i\omega \mathbf{1})y = 0$ sein. Dann sind aber $y(x) = e^{-i\omega x}$ und $y(x) = e^{i\omega x}$ Lösungen. Die Formeln von Euler ergeben dann die Linearkombinationen

$$\cos \omega x = \frac{e^{i\omega x} + e^{-i\omega x}}{2}$$

und

$$\sin \omega x = \frac{e^{i\omega x} - e^{-i\omega x}}{2i}$$

als reelle Lösungen.

Wie steht es mit der Gleichung für eine gedämpfte Schwingung? Dies ist die Gleichung

$$y''(x) + ky'(x) + \omega^2 y(x) = 0.$$

Nun wir wollen hier eine Anleihe bei der Herleitung der Lösungsformel für quadratische Gleichungen nehmen. Die Gleichung

$$x^2 + ax + b = 0$$

wird mittels der quadratischen Ergänzung also der Verschiebung

$$\overline{x} = \frac{a}{2} + x$$

auf die Form

$$\overline{x}^2 = \frac{a^2}{4} - b$$

gebracht. Wir probieren daher den Ansatz

$$\overline{y}(x) = e^{\frac{k}{2}x} y(x).$$

Dann errechnet man, dass

$$\overline{y}''(x) + \beta^2 \overline{y}(x) = 0$$

gilt, wo $\beta^2 = \omega^2 - \frac{k^2}{4}$ gilt. Dann sind die Funktionen $e^{-\frac{k}{2}x}\cos\beta x$ und $e^{-\frac{k}{2}x}\sin\beta x$ Lösungen. Dabei muss $\omega^2 - \frac{k^2}{4} < 0$ sein (d .h. die Dämpfung darf nicht zu stark werden!). Wenn $\omega^2 - \frac{k^2}{4} = 0$ gilt, ist $\overline{y}''(x) = 0$, also $\overline{y}(x) = A + Bx$. Dann ist

$$y(x) = e^{-\frac{k}{2}x}(A + Bx)$$

eine Lösung der Differentialgleichung.

Man kann auch versuchen, die inhomogene Gleichung

$$(D^2 + \omega^2 \mathbf{1})y = s$$

mittels der geometrischen Reihe zu lösen. Es ist sodann

$$\frac{\mathbf{1}}{D^2 + \omega^2 \mathbf{1}} = \frac{1}{\omega^2}(\mathbf{1} - \frac{D^2}{\omega^2} + \frac{D^4}{\omega^4} - \cdots).$$

Die Störfunktion $s(x) = x^5 - x^2$ ergibt

$$y(x) = \frac{1}{\omega^2}(x^5 - x^2 - \frac{20x^3 + 2}{\omega^2} + \frac{60x}{\omega^4}) = \frac{\omega^4 x^5 - 20\omega^2 x^3 - \omega^4 x^2 + 60x + 2\omega^2}{\omega^6}.$$

Klassisch ist die Untersuchung der Resonanzkatastrophe, wenn also die Störfunktion die Eigenfrequenz ω der Schwingung hat. Wählen wir zunächst eine andere Frequenz α, also

$$y''(x) + \omega^2 y(x) = \sin\alpha x.$$

Dann liefert die Formel die Lösung

$$y(x) = \frac{\sin\alpha x}{\omega^2 - \alpha^2}.$$

Wie zuvor ist auch

$$y(x) = \frac{\sin\alpha x - \sin\omega x}{\omega^2 - \alpha^2} = \frac{\sin\alpha x - \sin\omega x}{(\omega + \alpha)(\omega - \alpha)}$$

eine Lösung. Wir setzen $\alpha = \omega + h$. Dann ist

$$\sin\alpha x = \sin(\omega + h)x = \sin\omega x \cos hx + \cos\omega x \sin hx$$

und daher

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin\omega x \cos hx + \cos\omega x \sin hx - \sin\omega x}{-h} = -x\cos\omega x.$$

Somit ist

$$y(x) = -\frac{1}{2\omega} x \cos \omega x$$

die gesuchte Lösung, die mit $x \to \infty$ nicht beschränkt bleibt, also zur Katastrophe führen wird. Bekanntlich ist

$$y(x) = A \sin \omega x + B \cos \omega x - \frac{1}{2\omega} x \cos \omega x$$

die allgemeine Lösung, aber die Katastrophe kann durch Wahl von A und B nicht abgewendet werden. Besser wäre der Einbau einer geeigneten Dämpfung.

F. Schweiger

Allen Kolleginnen und Kollegen wünscht ein besinnliches und frohes Weihnachtsfest
die Redaktion