Österreichische
Mathematische
Gesellschaft

MATHE-BRIEF

November 2016 — Nr. 73

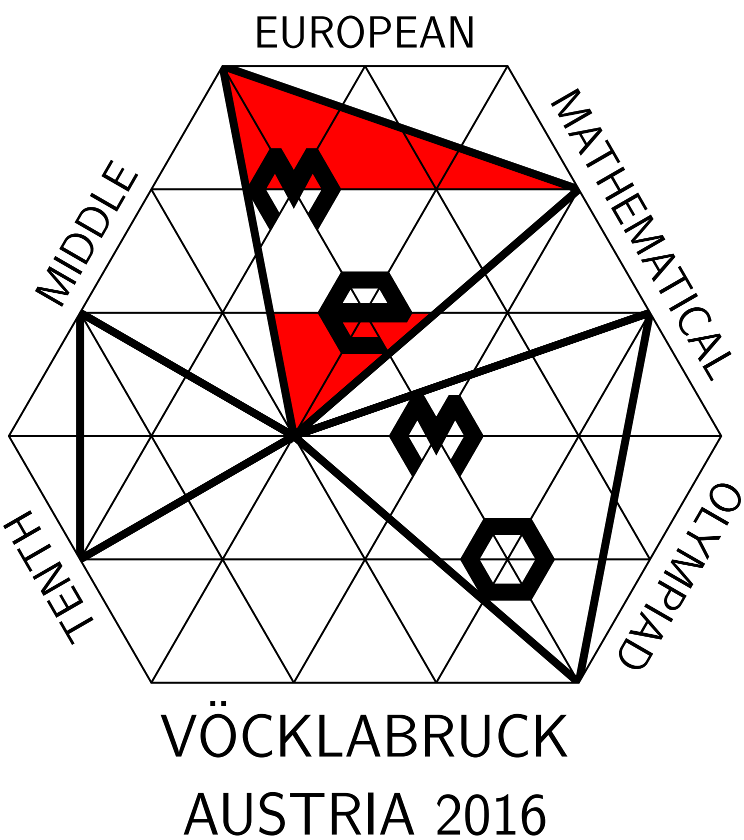
Herausgegeben von der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft
http: // www.oemg.ac.at / Mathe–Brief ——— mathe–brief@oemg.ac.at

DIE MITTELEUROPÄISCHE MATHEMATIKOLYMPIADE

Die Mitteleuropäische Mathematikolympiade (MEMO) hat im Sommer 2016 zum 10. Mal stattgefunden. Sie ist ein Schülerwettbewerb, wurde (wie die erste MEMO) von Österreich veranstaltet und fand vom 22. bis 28. August in Vöcklabruck statt. Wettbewerbe dieser Art wären ohne eine gezielte Vorbereitung und das oft unbedankte Engagement vieler Lehrerinnen und Lehrer sicher nicht möglich. (In Österreich geschieht die Vorbereitung im Rahmen der *Unverbindlichen Übung „Mathematische Olympiade“*, die für mathematisch interessierte Schülerinnen und Schüler eingerichtet ist und seit bald einem halben Jahrhundert angeboten wird.[1])

Ich möchte im Folgenden einige allgemeine Informationen zur MEMO geben und zwei Aufgaben des diesjährigen Wettbewerbs vorstellen.

[1]Vgl. dazu den MATHE-BRIEF Nr. 6 (September 2010)



Das Logo der MEMO 2016,
– a **MEMO**rable experience

Die MEMO findet seit 2007 jährlich statt. Sie ist die Nachfolgerin des Österreichisch-Polnischen Mathematischen Wettbewerbs (ÖPMW), der 29 mal als Wettbewerb zwischen einer österreichischen und polnischen Mannschaft in den Jahren 1978 bis 2006 abwechselnd in Österreich und Polen stattfand. An der MEMO (mit einem erweiterten Teilnehmerkreis) nehmen derzeit die Mannschaften von zehn Ländern teil, nämlich von Deutschland, Kroatien, Litauen, Österreich, Polen, der Schweiz, der Slowakei, Slowenien, Tschechien und Ungarn. In Analogie zur Internationalen Mathematikolympiade (IMO)[2] entsendet jedes teilnehmende Land sechs Teilnehmerinnen und Teilnehmer, die von einem Leader und einem Deputy Leader begleitet und betreut werden, die diesjährige österreichische Mannschaft von Walther Janous (Innsbruck) und Bernhard Schratzberger (Salzburg) in diesen Positionen. So wie viele andere regionale mathematische Schülerwettbewerbe bezweckt auch die MEMO, jüngeren Schülerinnen und Schülern die Möglichkeit zu geben, einerseits Erfahrungen für internationale Wettbewerbe zu sammeln, aber auch Freundschaften mit Gleichgesinnten aus anderen Ländern zu knüpfen.

Vor dem Beginn jeder MEMO sind alle teilnehmenden Länder eingeladen, Aufgaben vorzuschlagen. Von den heuer 67 eingereichten Aufgaben hat das Problem Selection Committee 36 für die Shortlist ausgewählt. Aus ihr hat die Jury, bestehend aus den Leaders und Deputies aller zehn Länder, unter der Leitung des Juryvorsitzenden Clemens Heuberger (AAU Klagenfurt) die zwölf Wettbewerbsaufgaben bestimmt.

Der Wettbewerb findet an zwei aufeinander folgenden Vormittagen mit jeweils fünf Stunden Arbeitszeit statt. Die anspruchsvollen Aufgaben entstammen den Gebieten Algebra, Geometrie, Kombinatorik und Zahlentheorie. Am ersten Tag ist im Einzelwettbewerb aus jedem Gebiet eine Aufgabe, am zweiten Tag sind im Mannschaftswettbewerb aus jedem Gebiet zwei Aufgaben zu lösen. Der Teambewerb ist eine vom ÖPMW übernommene Besonderheit mit einem speziellen Charme: Die Mitglieder jeder Mannschaft versuchen dabei gemeinsam möglichst viele der acht Aufgaben zu lösen.

Jede Aufgabe wird mit 0 bis 8 Punkten bewertet. An ca. 50% der Teilnehmerinnen und Teilnehmer werden für den Einzelbewerb Gold-, Silber- und Bronzemedaillen vergeben, und zwar im Verhältnis 1 : 2 : 3. Weiters werden Ehrende Anerkennungen (Honourable Mentions) an alle Teilnehmerinnen und Teilnehmer vergeben, die zumindest eine Aufgabe vollständig gelöst haben, aber keine Medaille gewinnen. Die drei erfolgreichsten Mannschaften erhalten auch Gold-, Silber- und Bronzemedaillen.

Die österreichische Mannschaft, die an der Jubiläums-MEMO teilnahm, war sehr jung. Trotzdem konnte Laurenz Kohlbach (Stiftsgymnasium St. Paul, 6. Kl.) eine Bronzemedaille gewinnen und das Team drei Aufgaben vollständig lösen.

Den Einzelbewerb gewann ein polnischer Schüler, den Mannschaftsbewerb das kroatische Team (jeweils mit voller Punktezahl).

Auf der Seite *https://www.math.aau.at/MEMO2016/* finden sich weitere Informationen zur Mitteleuropäischen Mathematikolympiade, insbesondere findet man dort die Aufgaben und Ergebnisse der aktuellen und Links zu vergangenen MEMOs.

Die folgenden Aufgaben wurden bei der MEMO 2016 in Vöcklabruck gestellt.

[2] Vgl. dazu den MATHE-BRIEF Nr. 19 (November 2011)

Aufgabe T-7. *Eine positive ganze Zahl n heiße Mozartzahl, wenn jede Ziffer (zur Basis* 10*) in den Zahlen* $1,2,\ldots,n$ *insgesamt in gerader Anzahl vorkommt.*

Man zeige: (a) Alle Mozartzahlen sind gerade. (b) Es gibt unendlich viele Mozartzahlen.

Lösung. (a) Für eine positive ganze Zahl k betrachten wir die Zahlenpaare $(2,3),(4,5),\ldots,(2k,2k+1)$. Die Zahlen jedes Paares bestehen aus gleich vielen Ziffern. Daher enthalten die zwei Zahlen jedes Paares insgesamt geradzahlig viele Ziffern. Folglich kommen in den Zahlen $1,2,\ldots,2k+1$ insgaesmt ungeradzahlig viele Ziffern vor. Auf Grund ihrer Definition muss deshalb jede Mozartzahl gerade sein.

(b) Es genügt, eine Folge von Mozartzahlen anzugeben. Dafür gibt es viele Möglichkeiten, etwa ist $(10^{2k}+22,\ k\geq 1)$ eine derartige Folge. Aus dem Beweis von Teil (a) ergibt sich, dass die Gesamtzahl aller Ziffern in den Zahlen $1,2,\ldots,10^{2k}+21$ ungerade ist. Wenn man die Zahl $10^{2k}+22$ dazu nimmt, treten insgesamt geradzahlig viele Ziffern auf. Deshalb genügt es, für jede der neun Ziffern $1,2,\ldots,9$ zu überprüfen, dass sie geradzahlig oft vorkommt. (Dies ist dann automatisch auch für die Ziffer 0 erfüllt.) Wir betrachten zuerst alle Zahlen von 0 bis $10^{2k}-1$ als Zahlen mit $2k$ Ziffern, wobei gegebenenfalls Anfangsnullen verwendet werden. In der Gesamtheit dieser Zahlen treten die zehn Ziffern gleich oft auf. Die Gesamtzahl aller Ziffern ist aber ein Vielfaches von 100. Deshalb ist die Anzahl, in der jede Ziffer auftritt (also insbesondere jede Ziffer ungleich 0), durch 10 teilbar, also gerade. Man zählt schließlich unschwer ab, dass in der Gesamtheit der 23 Zahlen $10^{2k},10^{2k}+1,\ldots,10^{2k}+22$ jede Ziffer geradzahlig oft vorkommt. Damit ist der Beweis beendet.

Tatsächlich ist 122 die kleinste Mozartzahl. „Natürlich“ stellt sich die Frage nach der Form aller Mozartzahlen. Ihre Antwort findet sich im Anhang an die Aufgabenlösung unter *https://www.math.aau.at/MEMO2016/?page_id=22*.

Die Aufgabe T-3 der MEMO 2016, für deren Lösung sehr genau argumentiert werden musste, war äußerst populär und wurde von allen Mannschaften gelöst:

Aufgabe T-3. *Ein Landstück hat die Form eines* 8×8*-Quadrates, dessen Seiten in Nord-Süd- beziehungsweise Ost-West-Richtung verlaufen, und besteht aus* 64 *kleineren quadratischen* 1×1*-Grundstücken. Auf jedem solchen Grundstück kann höchstens ein Haus stehen. Ein Haus steht auf höchstens einem* 1×1*-Grundstück.*

Wir sagen, ein Haus steht im Schatten, wenn drei Häuser auf den im Osten, Westen und Süden direkt angrenzenden Grundstücken stehen.

Man bestimme die größtmögliche Anzahl an Häusern auf dem Landstück, sodass keines davon im Schatten steht.

Bemerkung: Gemäß Definition stehen Häuser an der Ost-, West- und Südgrenze des Landstücks niemals im Schatten.

Für die Teilnehmerinnen und Teilnehmer der MEMO wurden neben der Beschäftigung mit der Mathematik vielfältige Möglichkeiten für Aktivitäten angeboten – Ausflüge, Wanderungen, Besichtigungen, sportliche Betätigungen, eine Rätselrallye und vieles mehr. All dies hätte aber nicht verwirklicht werden können, wenn sich neben der sehr erfreulichen finanziellen Unterstützung durch das BMB nicht auch diverse großzügige Sponsoren gefunden hätten.

Die MEMO fand auch ein breites und sichtbares Echo in der Öffentlichkeit: Plakate in Geschäften, Interviews mit Schülern, Berichte in Zeitungen und im Fernsehen, Hintergrundinformationen im

Bildungsnetzwerk. Dabei wurde ausführlich über den Wettbewerb, Ausflüge, Empfänge und die allen Beteiligten in bester Erinnerung bleibende Abschlussfeier mit der Siegerehrung informiert und auch das Flair „eingefangen“, das für das Zusammentreffen begeisterter junger Menschen charakteristisch ist. Vgl. dazu *https://www.math.aau.at/MEMO2016/?page_d=1249*.

Für den Sommer 2017 hat Litauen zur 11. MEMO ins Baltikum eingeladen.

Es soll noch einmal betont werden, dass bei vielen (nicht nur internationalen) mathematischen Schülerwettbewerben – insbesondere auf „höheren“ Stufen – einerseits mathematische Ernsthaftigkeit verlangt wird, andererseits aber auch die Idee des Gedankenaustausches unter Gleichgesinnten eine tragende Rolle spielt und viele lebenslange Freundschaften und Kooperationen bei solchen Wettbewerben entstanden sind.

Abschließend muss ich drei Personen erwähnen, die schon lange im Rahmen der Österreichischen, Mitteleuropäischen und Internationalen Mathematik-Olympiade mitarbeiten. Ohne ihren tatkräftigen und unermüdlichen Einsatz wäre die diesjährige MEMO nicht in der vorbildlichen und zukunftsweisenden Art möglich gewesen: Birgit Vera Schmidt (Graz), Clemens Heuberger (AAU Klagenfurt) und Heinrich Josef Gstöttner (Vöcklabruck).

Neugierig Gewordene lade ich auch herzlich zum Besuch der hervorragend gestalteten Homepage *https://www.math.aau.at/OeMO/* der Österreichischen Mathematischen Olympiade ein und bitte insbesondere darum, interessierte und begabte Schülerinnen und Schüler darüber zu informieren.

Walther Janous

Alle MEMO-Teilnehmerinnen und -Teilnehmer bei der Schlusszeremonie