Österreichische
Mathematische
Gesellschaft

MATHE-BRIEF

September 2016 — Nr. 71

Herausgegeben von der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft
http: // www.oemg.ac.at / Mathe–Brief ——— mathe–brief@oemg.ac.at

DAS SCHRIFTLICHE WURZELZIEHEN

Wie kann mithilfe der vier Grundrechnungsarten die Quadratwurzel aus einer gegebenen reellen Zahl A gezogen werden? In diesem Artikel soll neben dem Heronverfahren das schriftliche Wurzelziehen so dargestellt werden, dass der Rechenalgorythmus nicht nur operativ nachvollziehbar, sondern auch inhaltlich verständlich wird.

Das *Heronverfahren* liefert eine Folge, die gegen die gesuchte Wurzel $\sqrt{A}$ konvergiert. Man wählt zunächst eine beliebige positive reelle Zahl x_0 und stellt sich ein Rechteck vor, dessen eine Seite x_0 lang und dessen Fläche A ist. Die zweite Seite ist somit $\frac{A}{x_0}$. Der Mittelwert

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{A}{x_0}\right)$$

der beiden Seitenlängen sei nun die Seitenlänge eines weiteren Rechtecks mit Fläche A. Dieses Rechteck mit den Seiten x_1 und $\frac{A}{x_1}$ ähnelt einem Quadrat mehr als das erste Rechteck. Rekursiv definieren wir

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{A}{x_n}\right).$$

Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt und monoton und somit konvergent. Sie konvergiert gegen die Lösung der Gleichung

$$x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{A}{x}\right),$$

also gegen $\sqrt{A}$.

Die Quadratwurzel einer Zahl kann jedoch auch wie beim schriftlichen Dividieren Stelle für Stelle exakt bestimmt werden. Der Vorteil der Exaktheit hat jedoch seinen Peis. Wie wir sehen werden, steigt bei der Bestimmung jeder weiteren Stelle der Wurzel der Rechenaufwand.

Die Anzahl der Vorkommastellen von A teilen wir durch zwei und runden das Ergebnis gegebenenfalls auf. Dies ergibt die Anzahl der Vorkommastellen der Wurzel $\sqrt{A}$. Rür den Radikand $A = 5499025$ ist dies zum Beispiel $3{,}5 \approx 4$. Also hat $\sqrt{A}$ vier Vorkommastellen, denn

$$1000 = \sqrt{1000000} \leq \sqrt{5499025} < \sqrt{100000000} = 10000.$$

Alternativ teilen wir den Radikand rechts beginnend in Zweierblöcke $5|49|90|25$. Die Anzahl der Blöcke ist die Anzahl der Vorkommastellen der Wurzel. In der Dezimalentwicklung ist

$$\sqrt{5499025} = x_3 \cdot 10^3 + x_2 \cdot 10^2 + x_1 \cdot 10^1 + x_0 \cdot 10^0 + x_{-1} \cdot 10^{-1} + \ldots$$

mit $x_i \in \{0,1,2,\ldots,9\}$ und $x_3 \geq 1$. Die Zifferenfolge $x_3, x_2, x_1, \ldots$ gilt es zu bestimmen. Das Ziehen der Wurzel ist das schrittweise Lösen der Gleichung

(1) $$5499025 = (x_3 \cdot 10^3 + x_2 \cdot 10^2 + x_1 \cdot 10^1 + x_0 \cdot 10^0 + x_{-1} \cdot 10^{-1} + \ldots)^2.$$

Die größte ganze Zahl x_3 mit $\sqrt{5499025} \geq x_3 \cdot 10^3$ bzw. $5{,}499025 \geq x_3^2$ ist $x_3^2 = 4$ bzw. $x_3 = 2$. Nun bestimmen wir x_2

$$\begin{aligned}
\sqrt{5499025} &\geq 2 \cdot 10^3 + x_2 \cdot 10^2 \quad \text{folgen} \\
5499025 &\geq 4 \cdot 10^6 + 2 \cdot 2 \cdot 10^3 \cdot x_2 \cdot 10^2 + x_3^2 \cdot 10^4 \\
549{,}9025 &\geq 400 + x_2 \cdot (2 \cdot 20 + x_2) \\
149{,}9025 &\geq x_2 \cdot (2 \cdot 20 + x_2).
\end{aligned}$$

Wieder suchen wir die größte ganze Zahl, die diese Ungleichung erfüllt. Da $2 \cdot 20 = 40$ dreimal in 149 enthalten ist, vermuten wir, dass $x_2 = 3$ ist. In der Tat ist

$$149{,}9025 \geq 3 \cdot (2 \cdot 20 + 3) = 129,$$

jedoch $149{,}9025 \ngeq 4 \cdot (2 \cdot 20 + 4)$. Und so setzen wir fort.

$$\begin{aligned}
\sqrt{5499025} &\geq 23 \cdot 10^2 + x_1 \cdot 10^1 \\
5499025 &\geq 23^2 \cdot 10^4 + 2 \cdot 23 \cdot 10^2 \cdot x_1 \cdot 10^1 + x_1^2 \cdot 10^2 \\
54990{,}25 &\geq 52900 + 2 \cdot 230 \cdot x_1 + x_1^2 \\
2090{,}25 &\geq x_1 \cdot (2 \cdot 230 + x_1)
\end{aligned}$$

Weil 460 vier mal in 2090 geht, wählen wir $x_1 = 4$, denn $2090{,}25 \geq 4 \cdot (2 \cdot 230 + 4) = 1856$.

$$\begin{aligned}
\sqrt{5499025} &\geq 234 \cdot 10^1 + x_0 \cdot 10^0 \\
5499025 &\geq 54756 \cdot 10^2 + 2 \cdot 234 \cdot 10^1 \cdot x_0 \cdot 10^0 + x_0^2 \cdot 10^0 \\
23425 &\geq x_0 \cdot (2 \cdot 2340 + x_0)
\end{aligned}$$

Für $x_0 = 5$ ist $23425 = 5 \cdot (2 \cdot 2340 + 5)$ und somit $\sqrt{5499025} = 2345$. Diese Rechnungen stellen wir in einem Schema (2) dar.

(2) $$\begin{array}{ll}
\sqrt{5|49|90|25} = 2345 & \\
\underline{4} & \\
1\ 49 & \geq \underline{3} \cdot (2 \cdot 20 + \underline{3}) = 129 \\
\underline{1\ 29} & \\
\quad 20\ 90 & \geq \underline{4} \cdot (2 \cdot 230 + \underline{4}) = 4 \cdot 464 = 1856 \\
\quad \underline{18\ 56} & \\
\qquad 2\ 34\ 25 & \geq \underline{5} \cdot (2 \cdot 2340 + \underline{5}) = 5 \cdot 4685 = 23425 \\
\qquad \underline{2\ 34\ 25} & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

Dass wir im Schema in Zweierblöcken vorgehen, kommt daher, dass wir in der Rechnung die quadrierte Gleichung (1) lösen und dabei Koeffizienten von 100er-Potenzen bestimmen. Die unterstrichenen Ziffern auf der rechten Seite der Ungleichungen sind die Ziffern der Wurzel. Die unterstrichenen Plätze werden im Schema zunächst ohne Zahl angeschrieben, dann folgt die Frage nach diesen Ziffern, z.B. „Wie oft geht $2 \cdot 20$ in 149?“ Die Antwort 3 wird nun in das unterstrichene Feld geschrieben.

In den Ungleichungen oben wurden von 5499025 die Quadrate der Anfangsstücke der Ziffernentwicklung abgezogen, z.B. $52900 = (2 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^3)^2$. Im Schema (2) werden hingegen der Reihe nach Teile dieser Quadrate von den Anfangsstücken der Ziffernentwicklung abgezogen. Welche Terme im Schema (2) der Reihe nach vom Radikanden 5499025 abgezogen werden, ist im Folgenden durch eckige Klammern gekennzeichnet, z.B.

$$(2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2)^2 = [4 \cdot 10^6] + [3 \cdot (2 \cdot 20 + 3) \cdot 10^4] \quad \text{oder}$$
$$(2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1)^2 = [4 \cdot 10^6] + [3 \cdot (2 \cdot 20 + 3) \cdot 10^4] + [4 \cdot (2 \cdot 230 + 4) \cdot 10^2].$$

Um zu demonstrieren, wie dieses Schema bei nicht ganzzahligen Wurzeln funktioniert, berechnen wir $\sqrt{2}$ als weiteres Beispiel.

$$\begin{array}{l}
\sqrt{2} = 1{,}41421\ldots \\
\underline{1} \\
1\ 00 \geq \underline{4} \cdot (2 \cdot 10 + \underline{4}) = 96 \\
\underline{\ \ 96} \\
\quad 4\ 00 \geq \underline{1} \cdot (2 \cdot 140 + \underline{1}) = 281 \\
\quad \underline{2\ 81} \\
\quad 1\ 19\ 00 \geq \underline{4} \cdot (2 \cdot 1410 + \underline{4}) = 4 \cdot 2824 = 11296 \\
\quad \underline{1\ 12\ 96} \\
\qquad 6\ 04\ 00 \geq \underline{2} \cdot (2 \cdot 14140 + \underline{2}) = 2 \cdot 28282 = 56564 \\
\qquad \underline{5\ 65\ 64} \\
\qquad\ \ 38\ 36\ 00 \geq \underline{1} \cdot (2 \cdot 141420 + \underline{1}) = 282842 \\
\qquad\ \ \text{etc.}
\end{array}$$

Bernhard Krön