



Herausgegeben von der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft  
<http://www.oemg.ac.at/Mathe-Brief> — [mathe-brief@oemg.ac.at](mailto:mathe-brief@oemg.ac.at)

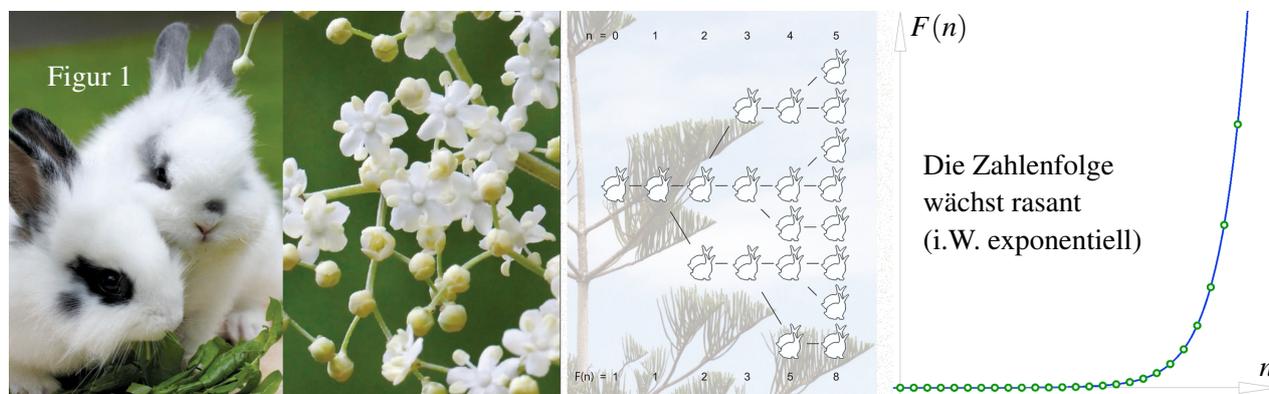
Die Mathematik wurde einmal beschrieben als ein „in sich abgeschlossener Mikrokosmos, der jedoch die starke Fähigkeit zur Widerspiegelung und Modellierung beliebiger Prozesse des Denkens und wahrscheinlich der gesamten Wissenschaft überhaupt besitzt“<sup>1</sup>. Der folgende Mathebrief soll dafür ein schönes Beispiel sein.

## Fibonacci und näherungsweise exponentielles Wachstum

### 1. Die Fibonacci-Folge

Der erste europäische Mathematiker war Leonardo da Pisa, auch Fibonacci genannt (ca. 1170 – 1240), dessen Name heute hauptsächlich wegen der von ihm untersuchten Zahlenfolge 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ... bekannt ist. Die Folge kann rekursiv definiert werden mit  $F(0) = F(1) = 1$ ,  $F(i+1) = F(i) + F(i-1)$ . Die nächste Zahl der Folge ist also die Summe der beiden vorangegangenen Zahlen.

Die Zahlenfolge ergab sich aus folgender, der Natur angepassten (wenn auch stark vereinfachten) Überlegung: Ein junges Kaninchen-Pärchen braucht einen Monat, um geschlechtsreif zu werden und kann ab dann jedes weitere Monat ein Pärchen zur Welt bringen, das sich seinerseits nach einem Monat Reife fortpflanzt (Fig. 1, Mitte).



Offensichtlich handelt es sich längerfristig um eine nahezu explosionsartige (nämlich, wie sich herausstellen wird, exponentielle) Vermehrung, die so rasch vor sich geht, dass es fast keine Rolle mehr spielt, wenn irgendwann die Elterntiere sterben. Dieses Vermehrungsschema oder Teilungsprinzip ist in der Natur häufig, wenngleich es natürlich nicht so strikt mathematisch vor sich geht: Einmal gibt es mehr, einmal weniger Junge, die Aufteilung der Geschlechter ist nicht exakt 1 : 1, usw. Klassische exponentielle Vermehrung tritt nur bei Bakterien auf, wo sich die einzelnen Lebewesen durch Selbstteilung vermehren und damit keine Restbestände vorhanden sind.

<sup>1</sup>Marc Kac, Stanislaw Ulam: Mathematics and Logic, Dover Publ., 1992.

## 2. Fibonacci-Folge und die goldene Zahl $\Phi$

Mit der Definition kann man durch vollständige Induktion (vgl. Mathebrief Nr. 68) leicht beweisen, dass das  $n$ -te Glied um eins größer ist als die Summe der ersten  $n - 2$  Glieder. Es lässt sich weiter zeigen, dass der Quotient  $q_n = F(n)/F(n - 1)$ , sollte er konvergieren, als Ergebnis die berühmte irrationale „Goldene Zahl“

$$q_n \longrightarrow q = \Phi = (1 + \sqrt{5})/2 = 1,6180398\dots$$

ist: Es muss ja  $q = F(n)/F(n - 1) = F(n + 1)/F(n)$ , sein, also  $q = (F(n) + F(n - 1))/F(n) = 1 + 1/q$ , was zu einer quadratischen Gleichung mit der einzigen positiven Lösung  $q = \Phi$  führt. Zu zeigen ist allerdings, dass die Folge tatsächlich konvergiert. Dazu zerlegt man die Folge in zwei beschränkte Teilfolgen (gerades und ungerades  $n$ ).

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{13}, \frac{34}{21}, \dots$$

Beide Folgen sind beschränkt (nach oben hin durch 2, nach unten hin durch 0), und, was wieder durch vollständige Induktion gezeigt werden kann, monoton fallend bzw. monoton steigend. Somit konvergieren beide Teilfolgen und daher die gesamte Quotientenfolge, die aus der Fibonacci-Folge gebildet wurde.

Der Grenzwert  $\Phi$  hat zahlreiche schöne Eigenschaften, die, wie wir sehen werden, teilweise Relevanz in der Natur haben. So folgt aus (1)  $\frac{1}{\Phi} = \Phi - 1$  bereits (2)  $\Phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}$ .

Die Zahl lässt sich also durch einen unendlichen Bruch (Kettenbruch) darstellen. Es lässt sich zeigen, dass die goldene Zahl insofern „maximal irrational“ ist, als sie bei gegebenem Nenner am schlechtesten durch eine rationale Zahl approximierbar ist. Dies hängt damit zusammen, dass die Kettenbruchelemente (die Zahlen, die jeweils an erster Stelle im Nenner stehen) allesamt eins sind.

## 3. Große Fibonacci-Zahlen sind i.W. gerundete Potenzen von $\Phi$

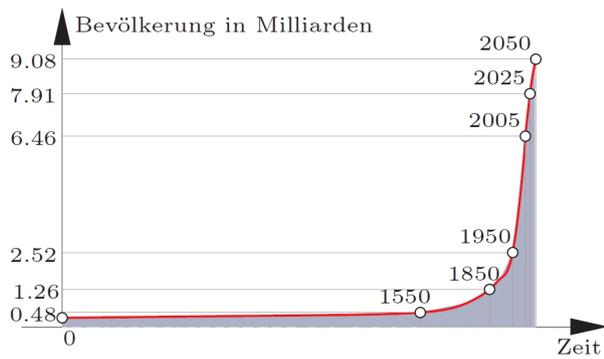
Bemerkenswert ist, dass sich größere Fibonacci-Zahlen sehr gut durch die Formel  $F(n) = c \cdot \Phi^n$  mit  $c = \Phi/\sqrt{5} \approx 0,7236067977$  beschreiben lassen<sup>2</sup>. Man stellt dies zunächst empirisch für genügend große  $n$  fest: So ist z.B.  $F(27) = 317811 \approx 0,7236067977 \cdot \Phi^{27}$ , und ebenso  $F(28) = 514229 \approx 0,7236067977 \cdot \Phi^{28}$ . Wenn es für  $F(n - 2)$  und  $F(n - 1)$  „stimmt“, dann stimmt es auch für  $F(n) = F(n - 2) + F(n - 1) = c \cdot \Phi^{n-2} + c \cdot \Phi^{n-1} = c \cdot \Phi^{n-1}(\frac{1}{\Phi} + 1) = c \cdot \Phi^n$  (wegen (1)). Damit liegen ab genügend großem  $n$  die Punkte  $(n, F(n))$  nahezu exakt auf einer Exponentialkurve (siehe Fig. 1 rechts). Die Fibonacci-Folge hat somit tatsächlich direkt mit exponentiellem Wachstum zu tun, und Fibonacci hat – ohne den Begriff der Exponentialfunktion – dieses Phänomen beschrieben.

## 4. Der Praxistest: Die Entwicklung der Gesamt-Erdbevölkerung

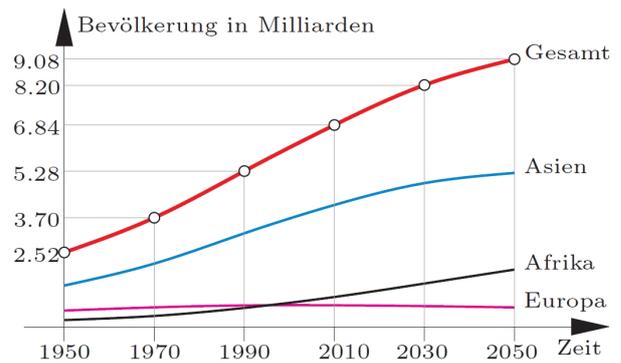
Fig. 2 zeigt die Entwicklung der Gesamt-Erdbevölkerung, wobei die Zahlen, die sich auf vergangene Zeiten beziehen, nur Schätzungen sind. Erst für die letzten 200 Jahre liegen verlässliche Daten vor. Man braucht kein Mathematiker zu sein, um die Brisanz der rot eingezeichneten Kurve zu erkennen. Die optische Ähnlichkeit zum Funktionsgraphen in Fig. 1 ist auffällig.

Die Fläche unter der Kurve kann als Maß für die Anzahl aller je geborenen Menschen interpretiert werden. Man schätzt, dass vor 10000 Jahren etwa 5 Millionen Menschen gelebt haben, um die Zeitenwende etwa 300 Millionen. Etwa 6 – 7% aller je geborenen Menschen leben noch. Im Jahr  $y = 2045$  werden es 9% sein. Das erinnert an die Eigenschaft der Fibonacci-Folge, wo ja das  $n$ -te Glied gleich der um 1 vergrößerten Summe aller vorangegangenen Glieder bis  $n - 2$  ist.

<sup>2</sup>Siehe z.B. Peter Kirschenhofer, Helmut Prodinger, and Robert F. Tichy: Fibonacci Numbers of Graphs III: Planted Plane Trees. Fibonacci Numbers and Their Applications. D. Reidel Dordrecht (1986).



Figur 2

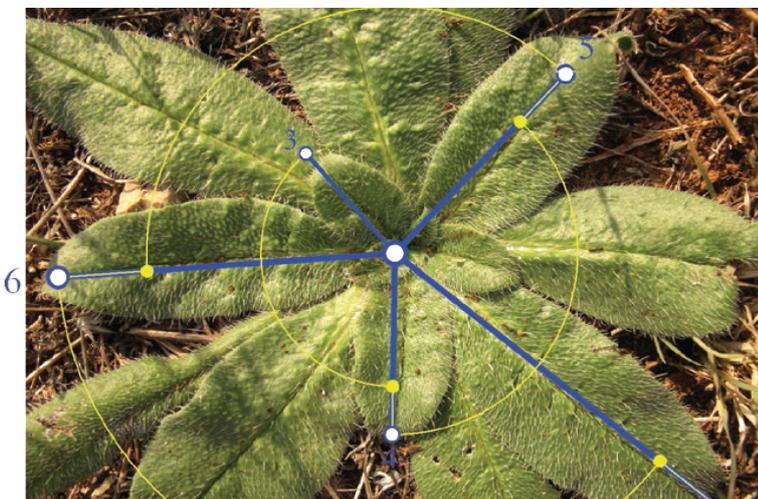


Figur 3

Exponentielles Wachstum führt aus der Sicht der Mathematik zum Kollaps. In der Praxis zeichnet sich – als Hoffnungsschimmer – ab, dass die Zunahme der Weltbevölkerung abflacht. Fig. 3 zeigt einen Detailausschnitt der roten Kurve in einem Zeitraum von 100 Jahren. Derzeit wächst die Weltbevölkerung jährlich um die Einwohnerzahl Deutschlands. Der rechte Teil der Kurve ist natürlich eine Hochrechnung! Wenn sich diese bewahrheitet, ist eine Stabilisierung der Weltbevölkerung auf hohem Niveau zu Ende des Jahrhunderts in Sicht. Man sieht in dieser Hochrechnung auch, wie sich die Bevölkerungszahlen auf den einzelnen Kontinenten entwickeln werden. Offensichtlich hängt alles von Asien ab ...

### 5. Der Goldene Winkel

Teilt man den vollen Winkel von  $360^\circ$  im Verhältnis  $1 : \Phi$ , so ergibt sich der als goldene Winkel bezeichnete Winkel  $\gamma = 360^\circ / (1 + \Phi) = 720^\circ / (3 + \sqrt{5}) \approx 137,507764...^\circ$ . Die „maximale Irrationalität“ von  $\Phi$  wirkt sich nun wie folgt aus: Trägt man den Winkel  $\gamma$  immer und immer wieder auf, wird man trotzdem nie zur Ausgangslage zurückkehren. Bei einem rationalen Teilungsverhältnis  $p : q$ ,  $p$  und  $q$  teilerfremd, wäre dies nach  $q$ -maligem Auftragen der Fall, und der volle Winkel wäre dann  $p$ -mal durchlaufen.



Figur 4

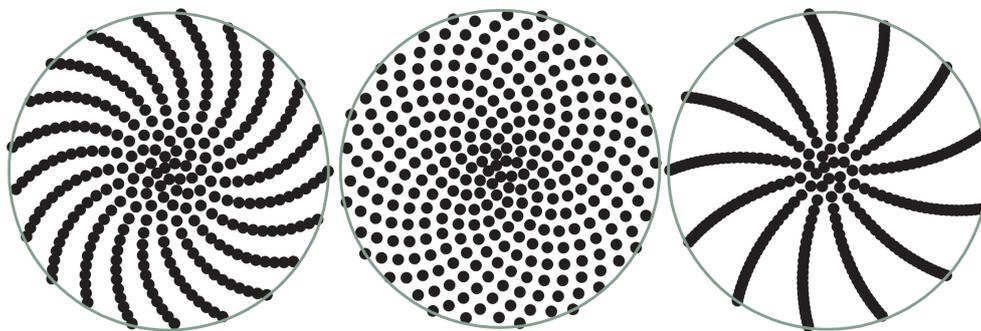


Fig. 4 illustriert nun schön, dass das manche Pflanzen durchaus ausnützen: Indem Blätter so angeordnet werden, dass die größeren unteren Blätter immer um den goldenen Winkel gedreht werden,

ist der Überdeckungsgrad der Blätter minimal und die Pflanze kann optimiert Photosynthese betreiben. Ist das für das Leben der Pflanze von großer Bedeutung, wird mittels Evolution (Mutationen und deren Vererbung) im Laufe hunderter Generation der optimale Winkel gefunden. Durch den besseren Vermehrungserfolg bleibt dieser auf lange Sicht erhalten. Die Sache ist jedoch nur für relativ wenige Pflanzen dermaßen essentiell, dass auch wirklich auf's Grad der richtige Winkel vorliegen muss, zumal ja die Anzahl der Blätter beschränkt ist.

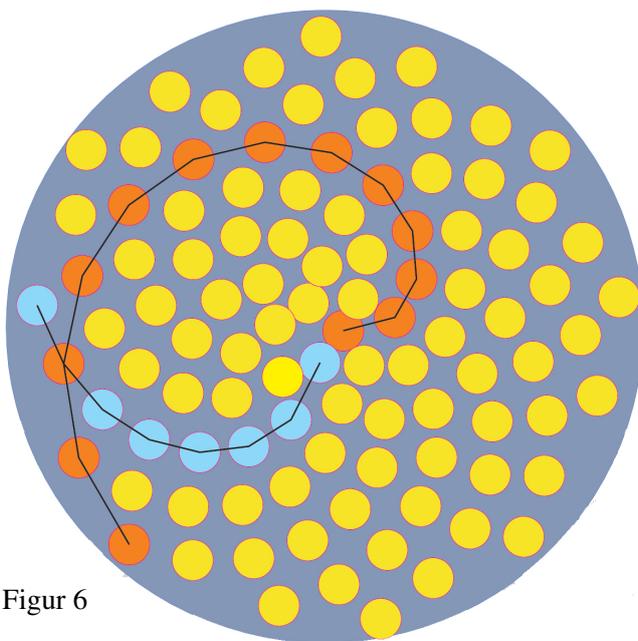
**6. Zusammenhang mit Wachstum von Blütenständen: Phyllotaxis**

Anders sieht die Sache aus, wenn eine Pflanze möglichst viele Samen auf kleinster Fläche verteilen will. Beim Wachsen erweist es sich dabei als mit Abstand am günstigsten, die nächste Einzelblüte durch Verdrehen im goldenen Winkel bei gleichzeitiger geringfügiger exponentieller Vergrößerung des Abstands vom Zentrum zu wählen. Jede Pflanze wird den von ihr „gewählten“ Winkel an die Nachkommen weitergeben. Durch geringfügige Mutationen wird es zu Veränderungen im Winkel kommen. Jene Pflanze, die den besten Winkel gewählt hat, kann mehr Nachkommen hinterlassen. Dementsprechend setzt sich der optimale Winkel immer wieder aufs Neue durch.



Figur 5

Fig. 5 zeigt die Ergebnisse einer Computersimulation, bei der 300 Elemente (Samen) nach dem genannten Prinzip verteilt werden. Links wird der optimale Drehwinkel  $\gamma$  nur um nur 1/4-Grad verringert, rechts ist der Winkel 1 Grad zu groß. Hier wird ersichtlich, dass es auf Zehntelgrad oder sogar Hundertstel Grad ankommt!



Figur 6



## 7. Vermeintliche Spiralen

Beim Anblick von Sonnenblumen, Gänseblümchen und vieler anderer Blüten (z. B. Echinacea-Arten) erkennt das menschliche Auge Spiralen (Fig. 6). Einmal drehen sie sich im Uhrzeigersinn, das andere Mal dagegen. Oft ist die Zuordnung der Einzelblüten gar nicht so einfach bzw. eindeutig (siehe Computerbild). Die Spiralen ergeben sich als Nebenprodukt bei der Anordnung der Samen. Weil sie mit dem goldenen Winkel bzw. den Fibonacci-Zahlen zusammenhängen – und diese i.W. exponentiell ansteigen –, kommen dabei „Kurven“ zustande, die logarithmischen Spiralen ähneln. Die Blütenknospen sind in der Natur oft sechseckig oder viereckig verpackt und nach außen hin größer werdend. Die beiden Computersimulationen in Fig. 6 rechts zeigen, dass man die Spiralen mehr oder weniger gut sieht, je nach Art der Verpackung der Blütenknospen.

Georg Glaeser

### LITERATUR

- [1] G. Glaeser: Wie aus der Zahl ein Zebra wird. Springer Spektrum Heidelberg, 2010
- [2] G. Glaeser: Der mathematische Werkzeugkasten. Anwendungen in Natur und Technik (4.Aufl.). Springer Spektrum Heidelberg, 2014
- [3] B. Werner: Fibonacci-Zahlen, Goldener Schnitt, Kettenbrüche und Anwendungen für Lehramtsstudierende, 2006.  
<http://www.math.uni-hamburg.de/home/werner/GruMiFiboSoSe06.pdf>