Österreichische
Mathematische
Gesellschaft

MATHE-BRIEF

April 2016 — Nr. 68

Herausgegeben von der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft
http://www.oemg.ac.at/Mathe–Brief ——— mathe–brief@oemg.ac.at

Wer fürchtet sich vor der vollständigen Induktion?

Als ich als Mathematik-Student zum ersten Mal einen Beweis „mit vollständiger Induktion“ vorgeführt bekam, hatte ich den Eindruck, hier geschehe etwas Geheimnisvolles aus den lichten Höhen unzugänglicher Mathematik. Erst mit der Zeit habe ich begriffen, dass nur ein paar sehr einfache und durchaus verständliche Überlegungen angestellt werden, um sicherzustellen, dass eine angeblich für jede natürliche Zahl n geltende Behauptung tatsächlich zutrifft.

Wir können uns etwa vorstellen, dass wir vor einer Leiter stehen (möglicherweise ist ihr Ende gar nicht in Sicht) und uns besorgt fragen, ob wir wohl imstande sind, auf dieser Leiter beliebig hoch hinaufzusteigen. Wir können jedenfalls dann beruhigt sein, wenn wir über zweierlei sicher sind: erstens, dass wir es auf die erste Sprosse schaffen, und zweitens, dass wir imstande sind, von jeder Stufe auf die nächste hinaufzuklettern. Wenn beides zutrifft, sind wir sicher, dass wir von der ersten Sprosse auf die zweite, von dieser auf die dritte usw. und schließlich auf jede beliebig hoch gelegene Sprosse hinaufkommen.

Eine für alle natürliche Zahlen n aufgestellte Behauptung ist so eine Leiter. Beispielsweise können wir uns für die Summe der ersten n natürlichen Zahlen

$$s_1(n) = \sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \cdots + n$$

interessieren.[1] Die Formel „$s_1(n) = \frac{n(n+1)}{2}$“ wäre eine „Sprosse“ dieser Leiter, und „hinaufklettern“ heißt in diesem Falle, sich davon zu überzeugen, dass für jedes n diese Behauptung tatsächlich stimmt. Kommen wir auf die erste Sprosse hinauf? Stimmt es tatsächlich, dass $s_1(1) = \frac{1\cdot 2}{2}$ ist? Ja, natürlich, $s_1(1) = 1$ und $\frac{1\cdot 2}{2}$ ist ebenfalls 1 (das nennt man den „Induktionsbeginn“).

Nun nehmen wir an, wir hätten die n-te Sprosse bereits erstiegen, das heißt, wir könnten uns bereits darauf verlassen, dass für dieses n die Formel $s_1(n) = \frac{n(n+1)}{2}$ stimmt (das nennt man die „Induktionsvoraussetzung“; für $n = 1$ haben wir das ja gerade nachgeprüft). Können wir uns dann irgendwie vergewissern, dass diese Formel auch für die nächste Zahl $n+1$ an Stelle von n zutreffen muss? Hier hilft uns die folgende Überlegung: Die Summe $s_1(n+1) = \sum_{k=1}^{n+1} k = 1 + 2 + \cdots + n + (n+1)$

[1] Ob man mit den „natürlichen Zahlen“ die Menge $\{0,1,2,3,\dots\}$ oder die Menge $\{1,2,3,,\dots\}$ meint, ist Ansichtssache und offenbar der Mode unterworfen. Derzeit wird in Östererreich in den vom zuständigen Ministerium veröffentlichten Lehrplänen und Grundkompetenzen zur Reifeprüfung davon ausgegangen, dass 0 zu den natürlichen Zahlen gehört. In diesem Mathe-Brief geht es uns um die Zahlen 1, 2, 3 und so weiter, wir wollen sie gerne, der Tradition folgend, als die natürliche Zahlen bezeichnen. Wer darauf besteht, dass die natürlichen Zahlen auch 0 enthalten und die hier vorkommenden Summen auch für den Fall $n = 0$ betrachten möchte, muss nur einer leeren Summe den Wert 0 zuweisen, also zum Beispiel $\sum_{k=1}^{0} k = 0$.

ist offenbar gleich $s_1(n+1) = s_1(n) + (n+1)$. Weil wir bereits davon ausgehen können, dass $s_1(n) = \frac{n(n+1)}{2}$ stimmt, können wir $s_1(n+1)$ tatsächlich ausrechnen:

$$\begin{aligned} s_1(n+1) &= s_1(n) + n + 1 \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 \\ &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2}. \end{aligned}$$

Das ist aber genau die Formel, nach der die Summe der ersten $n+1$ natürlichen Zahlen angeblich zu berechnen ist. Wir sind also tatsächlich in der Lage, von Sprosse n auf Sprosse $n+1$ zu klimmen (das nennt man den „Induktionsschritt"). Also — so schließen wir — stimmt die Formel für jede natürliche Zahl n.

Eine bekannte Anekdote berichtet, dass der berühmte Mathematiker GAUSS als Schüler seinen Lehrer in Erstaunen versetzt hat, als dieser der Klasse, um eine zeitlang Ruhe zu haben, die Aufgabe stellte, die Zahlen von 1 bis 100 zusammenzuzählen. Gauß kam nach kurzer Zeit mit der Antwort „*Die Summe ist 5050*" daher. Gefragt, wie er denn darauf gekommen sei, erklärte der Kleine einfach, man könne doch jeweils die Zahlen 1 und 100, 2 und 99 usw. zu 101 zusammenzählen, und das 50 mal machen.

Unsere Formel ergibt die gleiche Summe, wenn auch der kleine Gauß für seine Überlegung keine vollständige Induktion brauchte. Wie steht es aber mit der Behauptung, die Summe $s_2(n)$ der ersten n Quadratzahlen

$$s_2(n) = \sum_{k=1}^{n} k^2 = 1 + 4 + \cdots + n^2$$

wäre gleich

$$s_2(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\,?$$

Versuchen wir es wieder mit vollständiger Induktion: Gilt die Formel für $n = 1$? Jawohl, denn $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = 1$. Nehmen wir an, sie stimmt für ein festes n und prüfen wir nach, ob sie dann auch für $n+1$ and Stelle von n gilt:

$$\begin{aligned} s_2(n+1) &= s_2(n) + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} \\ &= \frac{(n+1)[n(2n+1) + 6n + 6]}{6} \\ &= \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \end{aligned}$$

Wieder stellen wir fest: wenn die Formel für ein n stimmt, dann stimmt sie auch für die nächste Zahl $n+1$, also muss sie für alle natürlichen Zahlen stimmen.

Allerdings bleibt dabei die Frage offen, welche Quelle uns denn die Formel, deren Richtigkeit wir bewiesen haben, geliefert haben könnte. Hier hilft ein Tip, — der natürlich auch einmal bewiesen werden muss, — wonach die Summe $s_p(n)$ der ersten n Potenzen $1^p,\ 2^p, \cdots, n^p$ durch ein Polynom des Grades $p+1$ gegeben ist, also für $p=2$

$$s_2(n) = an^3 + bn^2 + cn + d. \tag{1}$$

Und wie kommt man an die Koeffizienten a, b, c, d ?. Beispielsweise, indem man in (1) auf beiden Seiten für n der Reihe nach vier Zahlen einsetzt. Das liefert vier lineare Gleichungen in den vier Unbekannten a, b, c, d, die man dann ausrechnen kann. Beispielsweise liefern die Zahlen $n = 1, 2, 3, 4$ die Gleichungen

$$\begin{aligned} 1 &= a + b + c + d \\ 5 &= 8a + 4b + 2c + d \\ 14 &= 27a + 9b + 3c + d \\ 30 &= 64a + 16b + 4c + d \end{aligned}$$

und damit die Zahlen $a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{6}$, $d = 0$, also

$$s_2(n) = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} = \frac{n(2n^2+3n+1)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Die Tatsache, dass d gleich Null ist, hätten wir auch schon aus der Gleichung $s_2(0) = 0$ ableiten können, allerdings mit etwas schlechtem Gewissen, weil der Fall $n = 0$ (Summe ohne Summanden) eigentlich ausgeschlossen war.

Noch einfacher ist die folgende Berechnung:

$$\begin{aligned} n^2 &= s_2(n) - s_2(n-1) \\ &= an^3 + bn^2 + cn + d - a(n-1)^3 - b(n-1)^2 - c(n-1) - d \\ &= an^3 + bn^2 + cn + d - an^3 + 3an^2 - 3an + a - bn^2 + 2bn - b - cn + c - d \\ &= 3an^2 - 3an + a + 2bn - b + c \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow\ 0 = (3a-1)n^2 - (3a-2b)n + a - b + c \tag{2}$$

Weil das für jedes n gelten muss, ein quadratisches Polynom aber höchstens 2 Nullstellen haben kann, folgt daraus unmittelbar, dass alle Koeffizienten dieses Polynoms verschwinden müssen, also

$$a = \frac{1}{3},\ b = \frac{1}{2},\ c = \frac{1}{6}.$$

Unser Tip,

Behauptung. *Für jede Wahl von p gibt es ein Polynom P vom Grad $p+1$ mit rationalen Koeffizienten und der Eigenschaft, dass*

$$s_p(n) = \sum_{k=1}^{n} k^p = 1^p + 2^p + \cdots + n^p = P(n)$$

für alle natürlichen Zahlen n gilt

ruft wieder nach vollständiger Induktion. Als Hilfsmittel überzeugen wir uns von folgender Tatsache:

Hilfssatz. *Für jede Wahl von p gibt es ein Polynom der Form*[2]

$$P(n) = a_{p+1}n^{p+1} + a_p n^p + \cdots + a_1 n = \sum_{m=1}^{p+1} a_m n^m$$

mit rationalen Koeffizienten, sodass für alle natürlichen Zahlen gilt:

$$P(n) - P(n-1) = n^p.$$

BEWEIS (des Hilfssatzes): Wir erinnern uns an $(x-1)^m = x^m - mx^{m-1} + \frac{m(m-1)}{2}x^{m-2} + \cdots \pm mx \mp 1$ und überlegen dann wie folgt: Wenn unsere Behauptung stimmt, dann muss

$$P(x) - P(x-1) - x^p = \sum_{m=1}^{p+1} a_m x^m - \sum_{m=1}^{p+1} a_m (x-1)^m - x^p$$

ein Polynom des Grades $\leq p+1$ sein, das für alle natürlichen Zahlen n den Wert 0 annimmt. Weil ein nicht verschwindendes Polynom des Grades $\leq p+1$ höchstens $p+1$ Nullstellen haben kann, müssen also alle $p+1$ Koeffizienten dieses Polynoms zu 0 werden. Das liefert $p+1$ lineare Gleichungen in den Koeffizienten a_m $(1 \leq m \leq p+1)$. Wenn man sich die Mühe macht, diese aufzustellen, erhält man ein inhomogenes lineares Gleichungssystem in Dreiecksform, welches ohne weitere Elimination von Variablen eindeutig und explizit auflösbar ist. Als Konsequenz sind auch alle Koeffizienten a_m $(1 \leq m \leq p+1)$, die man aus diesem Gleichungssystem berechnen kann, rationale Zahlen, wie schon in (2) gesehen; beispielsweise ist $a_{p+1} = \frac{1}{p+1}$. Jedenfalls ist damit das Polynom P eindeutig bestimmt. □

BEWEIS (der Behauptung): Obwohl in unserer Hilfs-Überlegung von „allen natürlichen Zahlen n“ die Rede war, hatte das bisher noch nichts mit vollständiger Induktion zu tun, weil n bloß als Platzhalter für beliebig einsetzbare Zahlen fungiert hat. Wenn wir aber behaupten, das gegenständliche Polynom hätte für jedes n den gleichen Wert wie unsere Summe $s_p(n)$, müssen wir das mit vollständiger Induktion nachweisen:

Wie steht es mit dem Induktionsbeginn? Für $n = 1$ ist $P(1) - P(0) = P(1) = 1$, also das Gleiche wie $s_p(1) = 1$. Wir gehen also davon aus, dass $s_p(n) = P(n)$ (das ist unsere Induktions-Voraussetzung) und kümmern uns um

$$\begin{aligned} s_p(n+1) &= s_p(n) + (n+1)^p \\ &= P(n) + (n+1)^p \\ &= P(n+1) \qquad \text{(nach unserem Hilfssatz).} \end{aligned}$$

Damit haben wir aber den Induktionsschritt schon erfolgreich vollzogen und bewiesen, dass die Behauptung (der „Tip“) zutreffend ist. □

Traut sich jetzt jemand über die Formel

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \ ?$$

Gilbert Helmberg

[2] Der Koeffizient von n^0 ist also 0.

Viele weitere interessante Aufgaben finden sich im Buch [3], das explizit für Schülerinnen und Schüler verfasst wurde.

Literatur

[1] R. E. Graham, D. E. Knuth and O. Patashnik, Concrete Mathematics. Addison-Wesley, Reading (MA), 1989.
[2] M. Koecher, Klassische elementare Analysis. Birkhäuser, Basel 1987.
[3] I. S. Sominskij, L. I. Golovina und I. M. Jaglom, Die vollständige Induktion. Harri Deutsch, Thun–Frankfurt a.M., 1991.