Österreichische Mathematische Gesellschaft

MATHE-BRIEF

März 2016 — Nr. 67

Herausgegeben von der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft
http: // www.oemg.ac.at / Mathe–Brief ——— mathe–brief@oemg.ac.at

GEOMETRISCH KLAR, ABER ETWAS SCHWIERIGER ZU RECHNEN

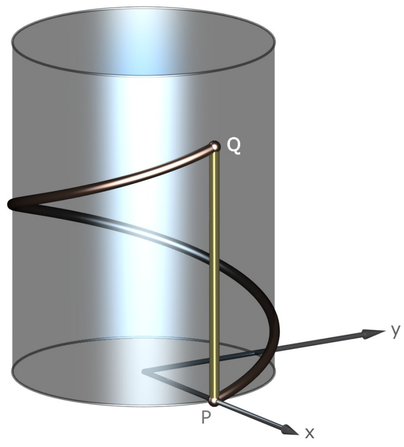
Unsere Landkarten vermitteln den Eindruck, dass zwischen zwei Orten gleicher geographischer Breite der Breitenkreis die kürzeste Verbindung sei. Wer von Österreich in die USA fliegt, wird aber bemerken, dass der Flug weit in den Norden führt. Man wird darauf hinweisen, dass auf der Kugel die kürzeste Verbindung stets entlang eines Großkreises verläuft. Die geodätischen Linien, so haben wir es gehört oder gelernt, sind eben Großkreise. Dabei sollte man nicht vergessen, dass geodätische Linien nicht immer die kürzeste Verbindung liefern. Ein einfaches Beispiel liefert die Zylinderfläche, etwa mit der Gleichung

$$x^2 + y^2 = 1.$$

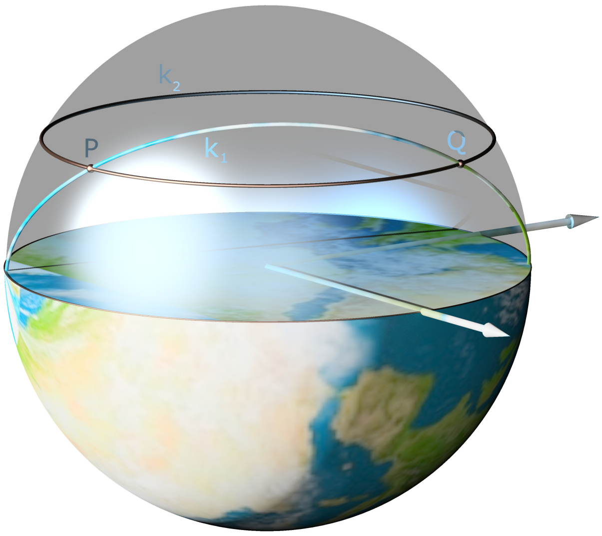
Die Schraubenlinie

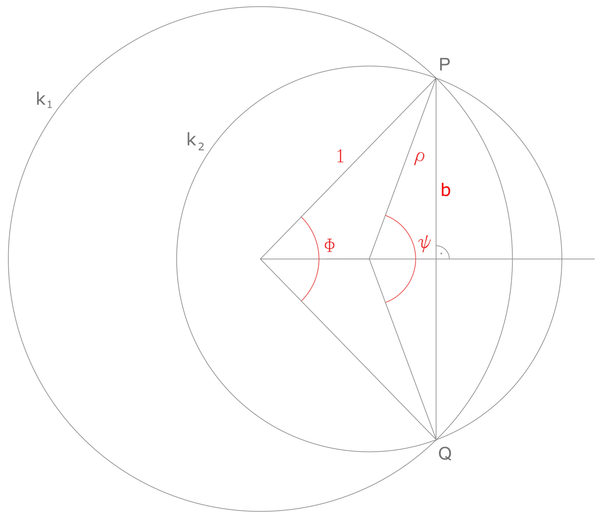
$$(x, y, z) = (\cos\phi, \sin\phi, a\phi)$$

ist eine geodätische Linie und stellt die kürzeste Verbindung zu „benachbarten“ Punkten dar. Sie läuft auch vom Punkt $P = (1, 0, 0)$ zum Punkt $Q = (1, 0, 2\pi a)$. Entlang dieser Kurve ist die Entfernung $2\pi\sqrt{1 + a^2}$, aber die Gerade $x = 1$ auf dem Zylinder misst die Entfernung als $2\pi a$.



Da aber geodätische Linien weit aus den Themen der Schule hinausführen, sollte man Schüler und Schülerinnen mit einem einfachen Beweis überzeugen. Wir betrachten eine Kugel mit Radius 1 und fixieren zwei Punkte P und Q. Wir legen einen Großkreis k_1 durch diese Punkte. Sei nun ein weiterer Kreis k_2 mit dem Radius $\rho < 1$ durch diese Punkte gelegt, so wird ein Stück dieses Kreises außen vorbeigehen. Aus der Skizze sieht man, dass der kürzere Teil des Kreises k_2 mit Radius $\rho < 1$ länger ist als der kürzere Teil des Großkreises k_1. Dies ist insofern überraschend, als der Winkel ψ ersichtlich größer als der Winkel ϕ ist, aber ρ kleiner als 1 ist.





Kann man dies nicht auch nachrechnen? Der kürzere Bogen des Großkreises k_1 zwischen P und Q hat die Länge ϕ und der kürzere Teil des kleineren Kreises k_2 die Länge $\rho\psi$. Zu zeigen ist also

$$\rho\psi \geq \phi,$$

wobei $b \leq \rho \leq 1$ (siehe Figur). Dies wird äquivalent umgeformt zu

$$\frac{\rho\psi}{2} \geq \frac{\phi}{2}$$

und weiter zu

$$\frac{\psi}{2} \geq \frac{\phi}{2\rho}$$

und

$$\sin\frac{\psi}{2} \geq \sin\frac{\phi}{2\rho}.$$

Die Trigonometrie lehrt uns $\sin\frac{\psi}{2} = \frac{b}{\rho}$ und $\sin\frac{\phi}{2} = b$. Wir müssen daher

$$\sin\frac{\phi}{2} \geq \rho\sin\frac{\phi}{2\rho}$$

zeigen. Dazu betrachten wir die Funktion

$$f(\rho) = \sin\frac{\phi}{2} - \rho\sin\frac{\phi}{2\rho}.$$

Wir müssen zeigen dass $f(\rho) \geq 0$, für alle ρ im Intervall $[b,1]$.

Für $\rho = 1$ ist $f(0) = 0$. Für $\rho = b$ ist es möglich, $f(b) = \sin\frac{\phi}{2}(1 - \sin\frac{\phi}{2b}) \geq 0$ zu zeigen, aber letzteres brauchen wir nicht, denn wir zeigen, dass $f(\rho)$ auf dem Intervall $[b,1]$ monoton fallend ist. Dazu berechnen wir

$$f'(\rho) = -\sin\frac{\phi}{2\rho} + \frac{\phi}{2\rho}\cos\frac{\phi}{2\rho}.$$

Ist nun $f'(\rho) \leq 0$? Setzen wir $\frac{\phi}{2\rho} = t$, so sehen wir die richtige Ungleichung

$$t\cos t \leq \sin t \quad \text{bzw.} \quad t \leq \tan t$$

vor uns.

Vielleicht gibt es interessierte Schüler oder Schülerinnen, die nachrechnen möchten, ob denn eine Ebene eine Kugel (wenn überhaupt) wirklich in einem Kreis schneidet. Um dies nachzuprüfen, wählt man am besten ein angepasstes kartesisches Koordinatensystem, dessen x- und y-Achse die Ebene aufspannen, und dessen Ursprung so positioniert wird, dass der Kugelmittelpunkt M auf der z-Achse zu liegen kommt. Dann liegt ein Punkt $X = (x,y,z)$ auf der Kugel genau dann, wenn seine Entfernung von $M = (0,0,m)$ gleich dem Radius R ist:

$$\overrightarrow{XM} \cdot \overrightarrow{XM} = R^2 \iff x^2 + y^2 + (z-m)^2 = R^2.$$

Die Punkte der Ebene sind durch $z = 0$ gekennzeichnet, d.h. man erhält die Gleichung

$$x^2 + y^2 = R^2 - m^2.$$

Bei $|m| > R$ hat diese Gleichung keine Lösung, anderfalls beschreibt sie einen Kreis mit Mittelpunkt im Ursprung und Radius $\sqrt{R^2 - m^2}$.

Der Autor bedankt sich bei G. Maresch für die Illustrationen.

F. Schweiger