Österreichische
Mathematische
Gesellschaft

MATHE-BRIEF

Februar 2016 — Nr. 66

Herausgegeben von der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft
http: // www.oemg.ac.at / Mathe–Brief ——— mathe–brief@oemg.ac.at

Liebe Kolleginnen und Kollegen,

wir hoffen, das Jahr hat für Sie gut begonnen, und wünschen Ihnen viel Erfolg für Ihre Arbeit. Den Kollegen Berthold Schuppar (TU Dortmund) und Hans Humenberger (U Wien) danken wir für ihren Beitrag in diesem Mathe-Brief.

Die Redaktion

LOGARITHMISCH RECHNEN – AUCH HEUTE NOCH!

Wenn man logarithmisch rechnet, so kann man die so genannten Schutzstellen[1] eines Taschenrechners ausnutzen, um die ersten Ziffern von auch sehr großen Zahlen herauszufinden, z.B. jene der größten bis heute bekannten Primzahl. Es ist doch eigentlich sehr erstaunlich, dass man mit einem normalen Taschenrechner bei einer Potenz, die ca. 13 Millionen Dezimalstellen hat, noch die ersten 7 Stellen ausrechnen kann! Wie dies geht, soll in der folgenden kurzen Note dargestellt werden.

Seit der Erfindung von Taschenrechnern und Computern ist das logarithmische Rechnen ziemlich in Vergessenheit geraten, natürlich zu Recht, wenn es nur um die Multiplikation von „normalen“ Zahlen geht. Es stellt sich aber heraus, dass man mit Hilfe von Logarithmen die Möglichkeiten eines normalen Taschenrechners ganz erheblich erweitern kann, z.B. wenn es darum geht, große Potenzen auszurechnen.

Denn der Bereich der Zehnerexponenten ist beim Taschenrechner in der Regel auf ± 99 begrenzt, Tabellenkalkulationsprogramme schaffen bis zu ± 307; für den täglichen Gebrauch reicht das natürlich vollkommen aus. Aber was ist z.B. mit der 2008 entdeckten Primzahl, nämlich $2^{43\,112\,609} - 1$? (Dies war die erste Primzahl mit mehr als 10 Mio. Dezimalstellen; dafür war sehr lange Zeit ein Preis von 100 000 US-Dollar ausgesetzt, der auch ausbezahlt wurde.)

Zunächst ist die genaue Anzahl der Dezimalstellen interessant: Wie bekommt man die Anzahl der Dezimalstellen einer natürlichen Zahl? Z.B. von 100 bis 999 haben die Zahlen 3 Stellen, die zugehörigen Zehnerlogarithmen sind 2 bzw. ca. 2,9996. Daraus ist schon zu erkennen, dass sich für die Anzahl A der Dezimalstellen einer Zahl n ergibt: $A(n) = \lfloor \log n \rfloor + 1$, wobei $\lfloor x \rfloor$ die nach unten gerundete Zahl bezeichnet (manchmal auch mit eckigen Klammern geschrieben: „Gauß-Klammer“). In den meisten Fällen könnte man auch $A(n) = \lceil \log n \rceil$ (nach oben gerundet) schreiben, nur bei den reinen Zehnerpotenzen würde es dann nicht stimmen, denn z.B. $100 = 10^2$ hat schon 3 Ziffern.

Ob man 1 von der Zweierpotenz abzieht oder nicht, spielt dafür keine Rolle, auch im Folgenden nicht, deshalb rechnen wir jetzt einfach mit $a = 2^{43\,112\,609}$. Der Taschenrechner[2] ergibt:

$$\log(a) = 43112609 \cdot \log(2) = 12978188{,}5$$

Also hat a genau 12 978 189 Dezimalstellen. So weit, so gut. Aber es geht viel besser!

Wenn man $a = m \cdot 10^b$ mit einer so genannten Mantisse $1 \leq m < 10$ ansetzt, dann ist:

$$\log(a) = \log(m) + b \qquad \text{mit} \quad 0 \leq \log(m) < 1.$$

[1] Dies sind Stellen, mit denen der Taschenrechner zwar intern rechnet aber nicht mehr am Display anzeigt.

[2] Die Rechnungen wurden mit einem Taschenrechner vom Typ Casio fx-991 ES ausgeführt; andere Typen (vor allem ältere) könnten evtl. andere Resultate zeigen.

Also ist $\log(m)$ der gebrochene Anteil von $\log(a)$, und wenn man $b = 12\,978\,188$ von $\log(a)$ abzieht, dann erhält man auf dem Taschenrechner-Display:

$$\log(m) = 0{,}5003329.$$

Das sind sechs Stellen mehr als vorhin angezeigt. Die normale Anzeige ist 10-stellig; $\log(a)$ enthielt nur 9, das wird aber jetzt verständlich, denn die auf die letzte Stelle (5) folgende 0 wurde „verschluckt“. Immerhin heißt das: Der Taschenrechner rechnet mit 15 Stellen, das sind 5 mehr als er anzeigt. Um m auszurechnen, tippt man einfach 10^{ANS}:

$$m = 3{,}164702572$$

Das heißt aber nicht, dass diese 10 angezeigten Stellen der Mantisse signifikant[3] sind! Eine numerische Faustregel besagt: Man kann nicht mehr rausholen als man reinsteckt. $\log(m)$ hat nur 7 signifikante Stellen, also kann man eigentlich bei m auch nicht mehr als 7 signifikante Stellen erwarten. Gleichwohl soll das nun überprüft werden.

Die absolute Fehlerschranke für den Rundungsfehler von $\log(m)$ beträgt $5 \cdot 10^{-8}$. Setzt man $\tilde{m}$ gleich der obigen Taschenrechner-Anzeige, dann gilt:

$$\log(m) = \log(\tilde{m}) \pm 5 \cdot 10^{-8} = 0{,}5003329 \pm 5 \cdot 10^{-8} \qquad \Longrightarrow \qquad m = \tilde{m} \cdot 10^{\pm 5 \cdot 10^{-8}}$$

Wenn x nahe bei 0 ist, dann ist 10^x nahe bei 1. Der Taschenrechner sagt:

$$10^{5 \cdot 10^{-8}} = 1{,}000000115\,; \qquad 10^{5 \cdot 10^{-8}} - 1 = 1{,}1512926 \cdot 10^{-7}.$$

Wieder einmal werden beim zweiten Ergebnis 5 Stellen mehr angezeigt als beim ersten. Für $c = 1{,}1512926 \cdot 10^{-7}$ ist

$$10^{-5 \cdot 10^{-8}} = \frac{1}{1+c} > 1 - c,$$

$$1 - 1{,}16 \cdot 10^{-7} < 10^{\pm 5 \cdot 10^{-8}} < 1 + 1{,}16 \cdot 10^{10^{-7}}.$$

Damit ergibt sich:

$$m = \tilde{m} \cdot \left(1 \pm 1{,}16 \cdot 10^{-7}\right) \;=\; \tilde{m} \pm \tilde{m} \cdot 1{,}16 \cdot 10^{-7}$$

(hier wurde absichtlich *auf*gerundet, da es sich um Fehler*schranken* handelt).

Mit $\tilde{m} \approx 3{,}2$ kann man grob abschätzen:

$$m = \tilde{m} \;\pm\; 4 \cdot 10^{-7}$$

Das heißt: Der Fehler in $m = 3{,}164702572$ liegt höchstens in der 7. Nachkommastelle, die ersten 6 Nachkommastellen zusammen mit der Stelle vor dem Komma ergeben in der Tat 7 signifikante Stellen, genau so viele wie bei $\log(m)$ angezeigt wurden.

Kontrolle z.B. mit MAPLE (dabei bitte nicht die reine Zweierpotenz eingeben, sonst „explodiert“ der PC; nur mit „evalf“ auswerten, etwa 12-stellig): $m = 3{,}16470269330$, d.h. das Ergebnis der Fehlerabschätzung wird bestätigt.

Anmerkungen

- Bei größeren Mantissen ($m \approx 10$) wird die Abschätzung etwas schlechter, bei s Stellen von $\log(m)$ sind dann möglicherweise nur mehr $s-1$ Stellen signifikant.
- Wir sind hier davon ausgegangen, dass es sich beim Fehler des Taschenrechner-Wertes für $\log(m)$ um einen reinen Rundungsfehler handelt, d.h. dass der Logarithmus richtig berechnet wurde. Rechenungenauigkeiten in der 15. Stelle können natürlich noch hinzukommen.
- Interessant ist vielleicht noch die allgemeine Näherung für 10^x bei $x \approx 0$ (hier wird $e^y \approx 1 + y$ für $y \approx 0$ verwendet):

$$10^x = \left(e^{\ln(10)}\right)^x = e^{\ln(10) \cdot x} \approx 1 + \ln(10) \cdot x \qquad \text{mit} \quad \ln(10) \approx 2{,}3\,.$$

[3] Eine Ziffer in einem Näherungswert heißt *signifikant*, wenn der Fehler des Näherungswertes höchstens eine halbe Einheit des Stellenwertes der betrachteten Ziffer ist. Wenn man korrekt rundet, so enthält der gerundete Näherungswert nur signifikante Ziffern.

Man kann natürlich einwenden: Warum nimmt man für solche Rechnungen nicht gleich ein Computeralgebra-System wie MAPLE? Dazu ist Folgendes zu sagen:

Erstens geht es auch (und besonders) im Mathematikunterricht darum, angemessene und ständig verfügbare Werkzeuge zu nutzen, und zwar bis zu ihrer Leistungsgrenze, die offenbar bei geschicktem Einsatz weit höher liegt als man normalerweise annimmt.

Zweitens hat auch ein Computeralgebra-System seine Grenzen. Das zeigte sich z.B. in [1], als es um das folgende Problem ging: Bei Potenzen b^n mit $b, n \in \mathbb{N},\ b \geq 2$ gibt es immer wieder welche, die knapp über einer Zehnerpotenz liegen, d.h. mit einer 1 gefolgt von vielen Nullen beginnen (die Nullenfolgen können sogar beliebig lang werden). Zur Demonstration sollten die ersten 12 Stellen von $13^{910\,265\,381} = 100000000144\ldots$ berechnet werden (diese Zahl hat über 1 Mrd. Dezimalstellen, auch das kann man mit einem Taschenrechner exakt ausrechnen). *Maple* ist nicht mehr in der Lage, den Befehl *evalf(13ˆ910265381, 12)* auszuwerten („overflow“), aber mit logarithmischer Rechnung funktioniert es (vgl. [1], S. 242).

Aufgabe: Führen Sie Analoges mit den Primzahlen

$$2^{57\,885\,161} - 1 \quad \text{und} \quad 2^{74\,207\,281} - 1$$

durch. Sie wurden im Februar 2013 bzw. Jänner 2016 entdeckt und waren zum Zeitpunkt ihrer Entdeckung die größten bekannten Primzahlen. Sie haben 17 425 170 bzw. 22 338 618 Dezimalstellen; die ersten sechs signifikanten Ziffern in der Dezimaldarstellung sind

$$581887\ldots \quad \text{bzw.} \quad 300376\ldots.$$

Literatur:

[1] Humenberger, Hans und Schuppar, Berthold: Irrationale Dezimalbrüche – nicht nur Wurzeln! In: Realitätsnaher Mathematikunterricht – vom Fach aus und für die Praxis, S. 232–245. Hildesheim, Berlin 2006; Franzbecker