Österreichische
Mathematische
Gesellschaft

MATHE-BRIEF

Oktober 2015 — Nr. 62

Herausgegeben von der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft
http://www.oemg.ac.at/Mathe–Brief ——— mathe–brief@oemg.ac.at

DIE DURCH n PUNKTE IN DER EBENE BESTIMMTEN ABSTÄNDE

Wenn Ihnen das nächste Mal auf dem Heimweg vom Einkaufen das Netz mit den Orangen aufplatzt und sich die Früchte nach kurzem Herumkollern am Boden verteilt haben, fangen Sie nicht gleich an zu fluchen, sondern aktivieren Sie Ihre mathematische Neugier! Sehen Sie die nunmehr auf dem Boden verteilten Orangen als n (auch wenn man diese Anzahl nicht zu kaufen bekommt) Punkte in der Ebene an: welche Fragen würden Sie als MathematikerIn stellen?

Klar, man kann fragen, welche Orange am weitesten weggerollt ist, aber diese Frage ist wohl eher durch den Zwang, sie wieder aufheben zu müssen, motiviert. Interessanter scheint da schon die Betrachtung der Abstände der Orangen untereinander. Abstrakt gesehen ist die Anzahl der durch n Punkte in der Ebene bestimmten Abstände gerade $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$. Vielleicht sind alle verschieden, vielleicht treten einige Abstände mehrmals auf. Können eventuell sogar alle auftretenden Abstände gleich sein?

Bezeichnen x_i, $i = 1,\ldots,n$, die Positionen der n Punkte in einem fest gewählten Koordinatensystem, so kann man alle eben angeführten Fragestellungen zusammenfassen zur Frage nach der Kardinalität der Menge

$$M(x_1,\ldots,x_n) := \{|x_i - x_j| : 1 \leq i < j \leq n\}.$$

Betrachtet man nun alle möglichen Konfigurationen von n Punkten und bezeichnet man mit $g(n)$ (bzw. $G(n)$) die kleinstmögliche (bzw. größtmögliche) auftretende Kardinalität unter den Mengen $M(x_1,\ldots,x_n)$, so sind unsere Fragen enthalten in:

$$\textit{Gilt } G(n) = \frac{n(n-1)}{2} \textit{ und } g(n) = 1 \textit{ für alle } n?$$

Nun, an dieser Stelle muss angemerkt werden, dass sich schon so mancher darüber den Kopf zerbrochen hat, unter anderen der große ungarische Mathematiker Paul Erdős, der als erster eine Arbeit [1] zum Problem der Menge von Abständen von n Punkten in der Ebene geschrieben hat und damit eine ganze Reihe von weiteren Überlegungen angestoßen hat. Doch bevor wir uns den bisher bekannten Ergebnissen widmen, wollen wir selbst noch etwas weiter über Antworten auf unsere Fragen nachdenken.

Beginnen wir also mit dem leichtesten, der Untersuchung von $G(n)$. Um für alle n die Aussage $G(n) = n(n-1)/2$ nachzuweisen, genügt es, eine Konfiguration von n Punkten anzugeben, in der alle Abstände $|x_i - x_j|$, $1 \leq i < j \leq n$, verschieden sind. Diese Aufgabe eignet sich gut für SchülerInnen, vielleicht mit dem Hinweis, dass man alle n Punkte z.B. auf die positive x-Achse legen kann und die Abstände zum Punkt im Ursprung geschickt wählen soll.

Alternativ dazu kann man noch einen reinen Existenzbeweis für eine Konfiguration mit n Punkten, die $n(n-1)/2$ verschiedene Abstände definieren, angeben. Man geht dabei induktiv vor, wählt einen beliebigen Punkt, dann beliebig einen zweiten, dann den dritten so, dass er auf keinem der Kreise um die ersten beiden liegt, deren Radien durch alle bisher vorhandenen Abstände (bei zwei Punkten ist das nur einer) gegeben sind, usw.

Nun zur Untersuchung von $g(n)$. Schnell wird klar, dass im Fall $n = 3$ für Punkte, die die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks bilden, nur ein Abstand auftritt, also $g(3) = 1$ gilt. Wieder ist es eine gute Aufgabe für SchülerInnen, zu zeigen, dass $g(4) = g(5) = 2$ gilt. Damit ist dann klar, dass $g(n) > 1$ für $n \geq 4$, doch damit wollen wir uns nicht zufrieden geben. Wir wollen vielmehr nach einer für alle n gültigen unteren bzw. oberen Abschätzung von $g(n)$ suchen.

Für eine obere Abschätzung ist eine Konfiguration von n Punkten gefragt, für die $g(n)$ möglicht klein ist, also möglichst wenig verschiedene Abstände auftreten. Andersherum betrachtet müssen also sehr viele Absände mehrfach auftreten und die Vermutung ist naheliegend, dass eine möglichst regelmäßige Anordnung der Punkte dies bewerkstelligt. Schon Paul Erdős hat dazu die Punkte $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$ mit $0 \leq x,y \leq \sqrt{n}$ verwendet: davon gibt es $([\sqrt{n}]+1)^2 \geq n$ viele, die paarweise Abstände der Form

$$\sqrt{(u^2+v^2)}, \text{ wobei } 0 \leq u,v \leq \sqrt{n},$$

haben. Alle auftretenden Abstände sind Quadratwurzeln ganzer Zahlen zwischen 0 und $2n$, also genügt es, zu wissen, wieviele ganze Zahlen zwischen 0 und $2n$ Summen von zwei Quadraten sind, um die Anzahl der verschiedenen Abstände zu kennen. Damit ist diese obere Abschätzung von $g(n)$ auf ein rein zahlentheoretisches Problem zurückgeführt, dessen Lösung schon Erdős bekannt war: es existiert eine Konstante c, sodass nicht mehr als $cn/\sqrt{\log n}$ ganze Zahlen zwischen 0 und $2n$ Summen von zwei Quadraten sind, woraus für das Abstandsproblem

$$g(n) \leq \frac{cn}{\sqrt{\log n}}$$

folgt.

Fehlt also noch eine untere Abschätzung von $g(n)$, die idealerweise so nah wie möglich an die gefundene obere Abschätzung herankommen soll, um das Verhalten von $g(n)$ gut zu beschreiben. Erdős selbst konnte zwar eine untere Abschätzung angeben, die durch ihre Einfachheit besticht, die jedoch viel zu weit von der oberen Abschätzung abweicht, um optimal zu sein.

Betrachte zu n beliebigen Punkten in der Ebene die konvexe Hülle, also den Durchschnitt aller Halbebenen, die alle n Punkte enthalten. Diese konvexe Hülle ist dann ein konvexes Polygon, dessen Ecken aus einer Teilmenge der gegebenen n Punkte bestehen; P_1 bezeichne eine beliebige Ecke dieses Polygons. Weiters sei k die Anzahl der verschiedenen Abstände unter den Abständen P_1P_i, $i = 2,\ldots,n$. Ist N die maximale Vielfachheit eines der Abstände unter den P_1P_i, so gilt klarerweise die Ungleichung $kN \geq n-1$, woraus wir

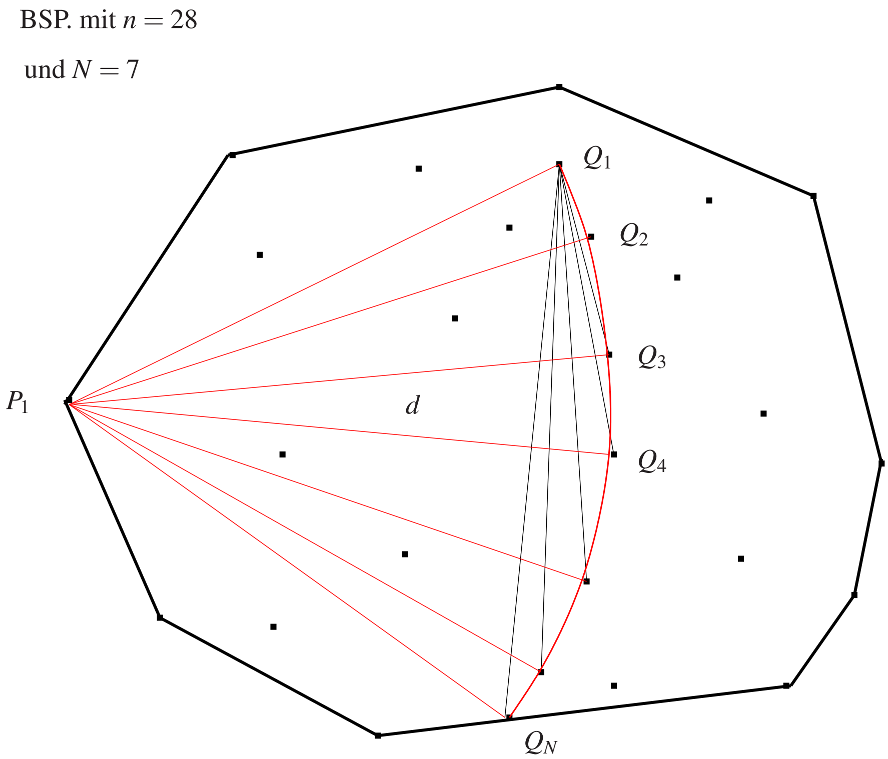
$$g(n) \geq (n-1)/N$$

entnehmen.

Ist d ein solcher Abstand, der N mal auftritt, so liegen N Punkte auf dem Kreis mit Radius d um P_1. Da P_1 darüberhinaus eine Ecke der konvexen Hülle aller n Punkte ist, müssen diese N Punkte alle in einer Hälfte des Kreises um P_1, also auf einem Halbkreis, liegen. Wir benennen diese N Punkte $Q_1,\ldots,Q_N$, sodass bei entsprechender Nummerierung $Q_1Q_2 < Q_1Q_3 < \ldots < Q_1Q_N$ gilt und diese $N-1$ Abstände paarweise verschieden sind, woraus sich

$$g(n) \geq N-1$$

ergibt. Siehe dazu die folgende Skizze:



Aus den beiden gewonnenen Abschätzungen folgt

$$g(n) \geq \max\{N-1, \frac{n-1}{N}\},$$

und der Ausdruck auf der rechten Seite wird minimal, wenn $N - 1 = (n-1)/N$. Die sich daraus ergebende quadratische Gleichung für N besitzt die positive Lösung $N = \sqrt{n - 3/4} + 1/2$, was schlussendlich auf

$$g(n) \geq \sqrt{n - \frac{3}{4}} - \frac{1}{2}$$

führt.

Trotz mehrjähriger Bemühungen konnte Erdős diese Abschätzung nicht verbessern; dies veranlasste aber eine ganze Reihe von Mathematikern, sich ebenfalls an dieser Frage zu versuchen und mit der Zeit wurden immer bessere untere Anschätzungen von $g(n)$ gefunden, die alle die Gestalt $g(n) \geq n^{1-\delta}$ mit immer kleineren, aber positiven Werten von δ hatten. Ein sensationeller Durchbruch gelang 2010 Larry Guth und Nets Hawk Katz, die die Existenz einer positiven Konstante c' zeigen konnten, sodass

$$g(n) \geq c' \frac{n}{\log n},$$

womit die urspüngliche Vermutung von Erdős, dass nämlich $g(n) \geq n^{1-\delta}$ für alle positiven δ gilt, bewiesen wurde.

Anstatt auf diesen phantastischen Beweis näher einzugehen (eine sehr gute Darsttellung findet man unter [2]), möchte ich noch einige weitere Fragestellungen präsentieren, die ebenfalls zu diesem Problemkkreis gehören und meist auch auf Erdős zurückgehen.

Eine Frage betrifft die Häufigkeit, mit der ein und derselbe Abstand unter $|x_i - x_j|$, $1 \leq i < j \leq n$, auftreten kann. Hier hat Erdős gezeigt, dass diese Häufigkeit sicher kleiner als $n^{3/2}$ sein muss, seine Vermutung war allerdings, dass der Exponent $3/2$ durch jeden Exponenten größer als 1 ersetzt werden kann.

Schließlich spielen noch der kleinste und größte auftretende Abstand eine ausgezeichnete Rolle und es ist anzunehmen, dass für die maximale Häufigkeit deren Auftretens besondere Schranken gelten. In der Tat tritt der Minimalabstand höchstens $3n-6$ mal auf und der Maximalabstand höchstens n mal. Beide Beweise sind einfach und eignen sich sehr gut, um interessierte SchülerInnen für Kombinatorik zu begeistern und liefern außerdem eine nette Anwendung des Eulerschen Polyedersatzes. Eine detaillierte Darstellung findet sich in [3].

LITERATUR

[1] P. Erdős: On sets of distances of n points. *Amer. Math. Monthly* 53 (1946), 248–250.

[2] *https://terrytao.wordpress.com/2010/11/20/the-guth-katz-bound-on-the-erdos-distance-problem/*

[3] R. Honsberger: *Mathematische Juwelen*. Vieweg, 1982.

Leonhard Summerer