Österreichische
Mathematische
Gesellschaft

MATHE-BRIEF

September 2015 — Nr. 61

Herausgegeben von der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft
http: // www.oemg.ac.at / Mathe–Brief ——— mathe–brief@oemg.ac.at

VERZERRUNGEN, WOHIN BEIDE AUGEN BLICKEN: RAUMKOLLINEATIONEN IN FOTOGRAFIE UND STEREOSKOPIE

Optische Täuschung beim einäugigen Sehen

Wenn wir einäugig auf einen vermeintlichen (im Bild gelben) Quader (Punkte $P, \dots$) blicken, könnte unser Quader unter Umständen ein (im Bild rotes) Polyeder sein, das in gewisser Weise mit dem Quader verwandt ist (Fig. 1): So sollten auch die Eckpunkte $P^*, \dots$ des „Ersatzquaders" ebene Polygone bilden, weil wir nicht-ebene Oberflächen wegen der unterschiedlichen Schattierungseffekte relativ leicht ausmachen können. Unter den unendlich vielen Möglichkeiten eignen sich besonders gut „perspektiv kollinear" verzerrte Polyeder. Bei solchen gilt: Entsprechende Punkte (also z.B. die Eckpunkte) liegen auf „Sehstrahlen" durch das Sehzentrum C, und Ebenen (also z.B. die Trägerebenen der Seitenflächen) entsprechen Ebenen („Ebenentreue").

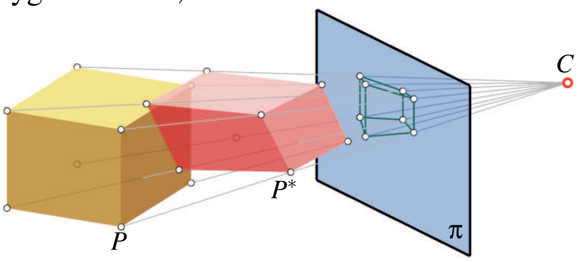

Fig. 1. Polyeder mit identischen Bildern

Aus der zweiten Eigenschaft folgt automatisch die „Geradentreue" und damit „Linearität", weil ja Geraden als Schnitt zweier Ebenen aufgefasst werden können. Die Verwandtschaft $P \longleftrightarrow P^*$ ist umkehrbar eindeutig. Solche Raumkollineationen findet man viel öfter, als man glauben möchte: In der Fotografie, der Stereoskopie, der Bühnenbildgestaltung, oder – wie in Fig. 2 – in der Kunst.

Fig. 2. Zwei nur scheinbar ähnliche Szenen: Links gleich große und gleich weit entfernte Statuen, rechts kollinear verzerrte Statuen, deren Abstand nach hinten stark abnimmt.

Die Gaußsche Kollineation: Kameraobjektive erzeugen räumliche Bilder

Jedes hochwertige Kameraobjektiv erzeugt nach den Gesetzen der geometrischen Optik mithilfe eines komplizierten Linsensystems einen perspektiv kollinearen (virtuellen) *Raum* hinter dem Linsenzentrum (die Transformation heißt Gaußsche Kollineation)[1].

Zur Konstruktion entsprechender Punkte P und P^* verwendet man folgende beiden Regeln: Die sog. Hauptstrahlen h durch das Linsenzentrum C bleiben ungebrochen ($h = h^*$), während Lichtstrahlen s parallel zur optischen Achse an der „Hauptebene" γ zu Strahlen s^* durch den Brennpunkt F^* (Abstand vom Linsenzentrum = Brennweite f) gebrochen werden. Der Bildpunkt $P^* = h^* \cap s^*$ entsteht i. Allg. nicht in einer vorgegebenen Bildebene π. Es liegt also zunächst ein echt „dreidimensionales Bild" vor, und nicht – wie üblicherweise vereinfachend gesagt wird – ein ebenes. Aus der Fliege in Fig. 3 rechts wird also eine virtuelle, kollinear verzerrte Fliege. Diese erzeugt – aus dem Linsenzentrum C projiziert – genau dasselbe fotografische Bild auf dem Sensor (bzw. der Filmebene) π (und auch im Prismensucher bzw. am Minibildschirm auf der Kamerarückseite) wie das Original!

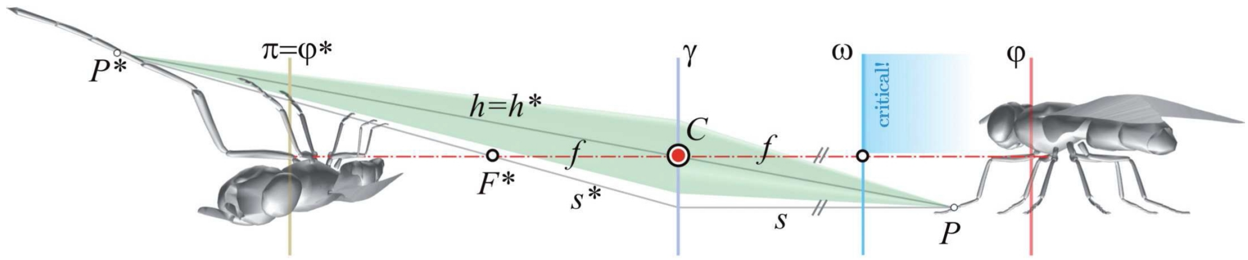

Fig. 3. Rechts das Original, links das virtuelle, kollinear verzerrte 3D-Bild, das zum Foto in in der Sensorbene (Filmebene) π führt

Damit werden nur Punkte, die in der sogenannten – der Sensorebene π entsprechenden – „Schärfenebene" $\varphi = \pi^*$ (und damit wegen der Umkehrbarkeit auch $\varphi^* = \pi$) liegen, als *Punkte* in π abgebildet, während sich die anderen Punkte als „Unschärfekreise" (Schnitte schiefer Kreiskegel durch die Blendenöffnung) abbilden. Punkte, die in der kritischen Ebene ω im Abstand f vor der Hauptebene γ liegen, haben Bildpunkte im Unendlichen. Punkte, die noch näher an γ liegen, haben nur theoretisch Bildpunkte P^*, welche auf derselben Seite der Hauptebene wie P liegen.

Wir beweisen nun, dass es sich tatsächlich um eine geradentreue Transformation des Raums handelt: Denken wir uns eine beliebige Gerade g im Raum festgelegt als Schnitt zweier spezieller Ebenen ε_1 und ε_2: ε_1 enthält g und ist parallel zur optischen Achse, ε_2 ist die Verbindungsebene von g und dem Linsenzentrum C. Nach den Regeln der geometrischen Optik wird ε_1 an der Hauptebene $\gamma \ni C$ in eine Ebene ε_1^* durch den Brennpunkt F^* (im Abstand der Brennweite f von C) gebrochen, während $\varepsilon_2 = \varepsilon_2^*$ ungebrochen bleibt. Damit ist $g^* = \varepsilon_1^* \cap \varepsilon_2^*$ tatsächlich eine Gerade.

Zweiäugiges Sehen

Betrachtet man unseren Quader von vorhin mit *beiden* Augen L und R (Fig. 4), scheint es deutlich schwieriger, von einem kollinear verzerrten Polyeder getäuscht zu werden. Wir werden bald sehen, dass die Vorstellungskraft des Gehirns eine Täuschung dennoch ermöglicht, sodass „man sieht, was man sehen will". Durch die unterschiedlichen Tiefen (Abstände von der „Verschwindungsebene" durch die beiden Augpunkte senkrecht zur Haupt-Blickrichtung) ergeben sich mehr oder weniger

[1] http://www1.uni-ak.ac.at/geom/files/3d-images-in-photography.pdf

differierende Sehwinkel für die einzelnen Punkte, die auf zwei Fotos mit parallelen optischen Achsen als „Parallaxe“ bezeichnet werden: Der Unterschied zwischen rechtem und linkem Bild P_L und P_R ist umso größer, je geringere Tiefe die Punkte haben. P_L und P_R liegen auf einer Parallelen zur Verbindungsachse der beiden Augen (Fig. 4).

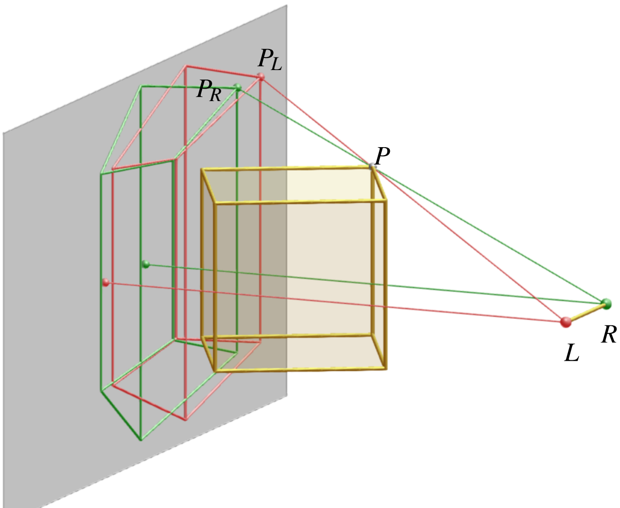

Fig. 4. Parallaxe beim zweiäugigen Sehen

Der Parallaxenabstand des Daumens auf der ausgestreckten Hand erzeugt z.B. bei abwechselndem Schließen des linken bzw. rechten Auges den bekannten „Daumensprung“ vor dem nahezu konstant erscheinenden weit entfernten Hintergrund. Weil die Armlänge bis zu einem gewissen Grad zum Augenabstand proportional ist, kann dieses Maß zum Abschätzen von Entfernungen von Objekten bzw. der Größe von Objekten bei bekannter Entfernung herangezogen werden (Faustregel: Die Entfernung eines Objekts ist etwa zehnmal so groß wie Zonenbreite, die man beim Objekt mit einem Daumensprung erfasst).

Am Sternenhimmel gibt es gar keine Parallaxe mehr, sodass wir optisch die Entfernung von Sternen nicht unmittelbar feststellen können. Indem wir den Durchmesser der Erdbahn (300 Millionen km) ausnützen, können wir allerdings im Halbjahresabstand zumindest von relativ nahen Sternen Bilder mit messbarer Parallaxe machen.

Stereoskopisches Sehen

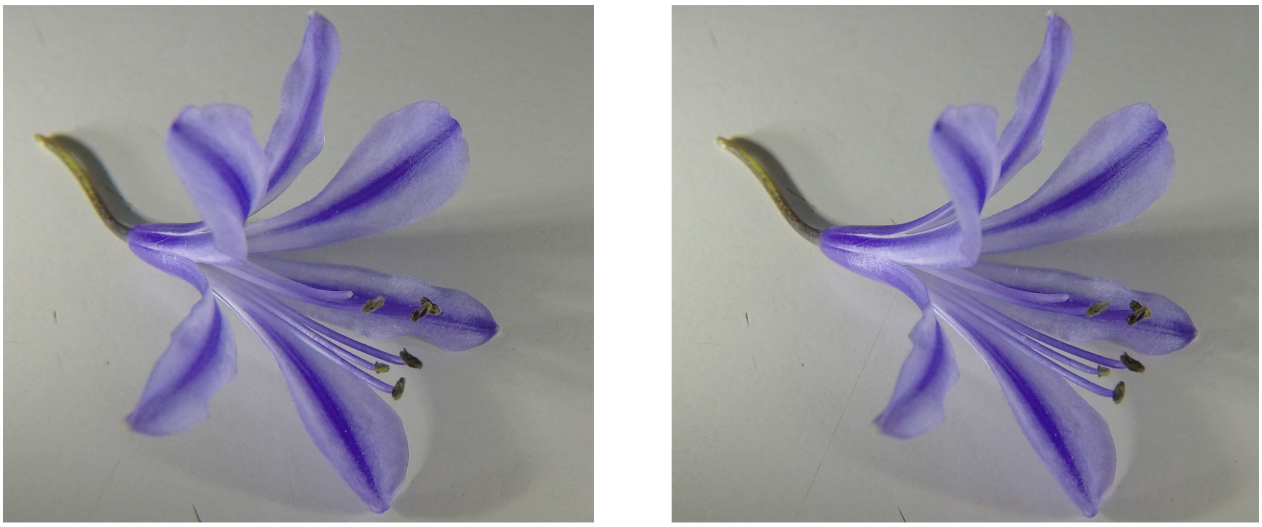

Fig. 5. Durch „Kreuzblick“ (Schielen) und notfalls zusätzliche Variation des Abstands schaffen (Zoomen) es die meisten Personen, ein dreidimensionales Objekt zu erkennen.

Darunter verstehen wir das gleichzeitige Betrachten zweier speziell angeordneter leicht unterschiedlicher ebener Perspektiven (also zB. Fotos), sodass durch Schnitt der Sehstrahlen ein räumlicher Eindruck entsteht. Projiziert man z.B. die beiden Bilder unseres Quaders in Fig. 4 so auf eine Leinwand, dass die Schnittpunkte der beiden Kameraachsen mit der Leinwand den beim Menschen üblichen Augenabstand von 60-65mm haben, und postiert sich mit beiden Augen an die Stelle der virtuell bei der Vergrößerung aus dem Mittelpunkt des stereoskopischen Bildes entstehenden Linsenzentren, dann liegt exakt dieselbe Raumsituation wie beim Fotografieren vor, und unser Gehirn kann die Bilder wieder zum ursprünglichen räumlichen Objekt vereinen. Hilfreich ist es dabei, wenn durch Tricks erreicht wird, dass das linke Auge nur das von der linken Kamera erzeugte Bild und das rechte nur das rechte Bild sehen kann (früher wurde das mit sog. Rot-Grün-Brillen erreicht, heute verwendet man Polarisations- oder Shutterbrillen)[2].

Das Gehirn justiert kollinear verzerrte Bilder nach

Das richtige Erstellen und Anordnen der Bilder erscheint sensibel: Nur wenn beides „kalibriert" und auf den entsprechenden Betrachter maßgeschneidert ist, kann man die *exakte* Wiederherstellung der Raumsituation erwarten. In fast allen Fällen wird unser Quader nicht exakt als Quader erscheinen, auch wenn die meisten Betrachter ihn als solchen identifizieren würden.

Fig. 5 soll ein Testbild für den Leser sein. Je nach Größe des Bildstreifens kann man durch sog. „Kreuzblick" das räumliche Objekt in der Mitte „herauswachsen" sehen. Die Blüte wurde aus geringer Distanz zweimal mit paralleler optischer Achse und weniger als 1 cm Abstand der optischen Achsen fotografiert (dieser Abstand wird beim „Ausdrucken" bzw. projizieren an die Wand vergrößert!). Schafft eine Testperson durch weiteres Vergrößern oder Verkleinern des Bildstreifens – z.B. am Computerbildschirm bzw. mittels Projektor – einen besseren räumlichen Eindruck zu erreichen, wurde der Achsabstand dem eigenen Augenabstand angepasst. Bei leichtem Bewegen des Kopfes (und Augenachse parallel zum Bildschirm bzw. Ausdruck) verändert das dreidimensionale Bild seine Proportionen ein wenig, ohne dass der räumliche Eindruck verschwindet.

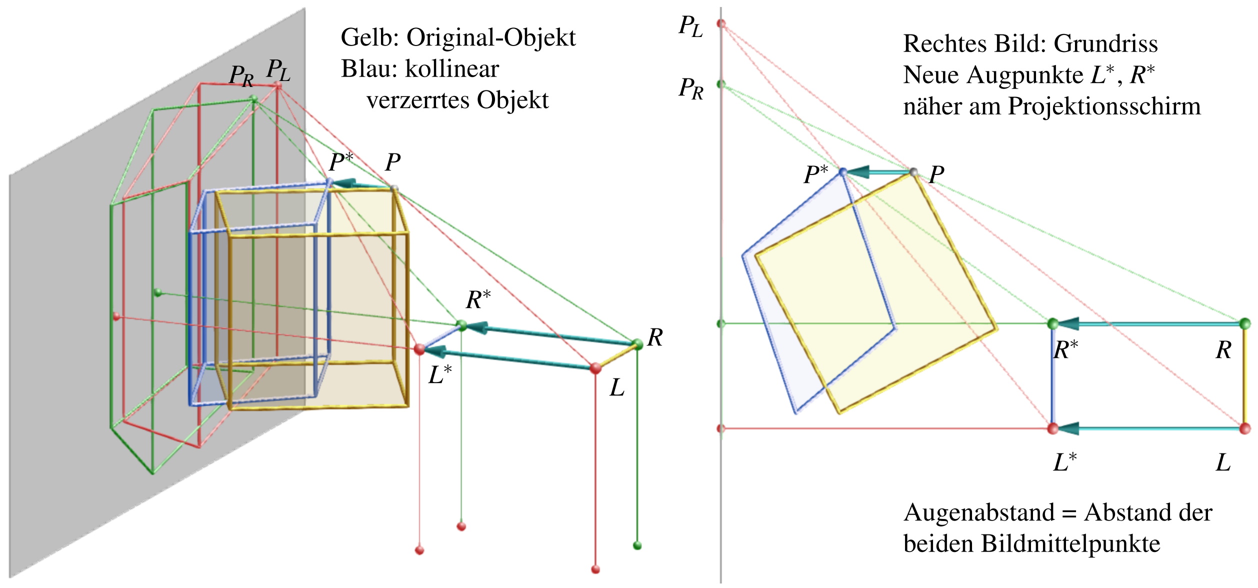

Fig. 6 Wenn wir – bei richtigem Augenabstand – den Abstand ändern, wird das Objekt nur gedehnt oder gestaucht.

Wir wollen nun zeigen, dass wir i.Allg. Raumkollineationen des ursprünglichen Objekts sehen. Beginnen wir mit dem einfachsten Fall: Wir projizieren – wie in Fig. 4 – so, dass die Durchstoßpunkte der Kameraachsen (das sind im Bild die Mittelpunkte bzw. Diagonalenschnittpunkte der Originalfotos) den menschlichen Augenabstand haben (±65 mm bei Männern, ±62 mm bei Frauen). Bei dieser Skalierung ergibt sich eine genau festgelegte Position der beiden Augen, die den

[2]Siehe dazu z.B. `http://www.marric-media.com/so-funktioniert-stereoskopie/` bzw. `http://de.wikipedia.org/wiki/Stereoskopisches_Sehen`

Linsenzentren der beiden Kameras entsprechen. Was passiert nun, wenn wir unsere Augen längs der Kameraachsen bewegen?

Fig. 6 zeigt (Strahlensatz!), dass sich das räumliche Ergebnis relativ „harmlos“ ändert: Das ursprüngliche Objekt wird nur gedehnt oder gestaucht (orthogonal affin verzerrt). Diese spezielle Kollineation ist parallelen- und teilverhältnistreu. Letzteres ändert sich auch nicht, wenn man sich (bei paralleler Augenachse) im Raum herumbewegt. Die Verzerrung wird abgeschwächt durch die Tatsache, dass man sich z.B. bei der Stauchung näher am vermeintlichen Raumobjekt befindet und die extremere Perspektive auch eine stärkere Tiefenwirkung suggeriert.

Eine robuste Sache…

Stimmt der Augenabstand nicht mit dem Abstand der Mittelpunkte (Diagonalenschnittpunkte) der beiden Original-Bilder überein, ist das rekonstruierte Raumobjekt immer noch *nur linear verzerrt* (perspektiv kollinear zum Original). Das ist sogar noch dann der Fall, wenn man linkes und rechtes Bild gegeneinander verschiebt. Fig. 7 rechts demonstriert, dass sich auch in diesem allgemeinen Fall subjektiv nicht allzu viel ändert, weil man ja das neue Objekt wieder aus einer anderen Perspektive sieht.

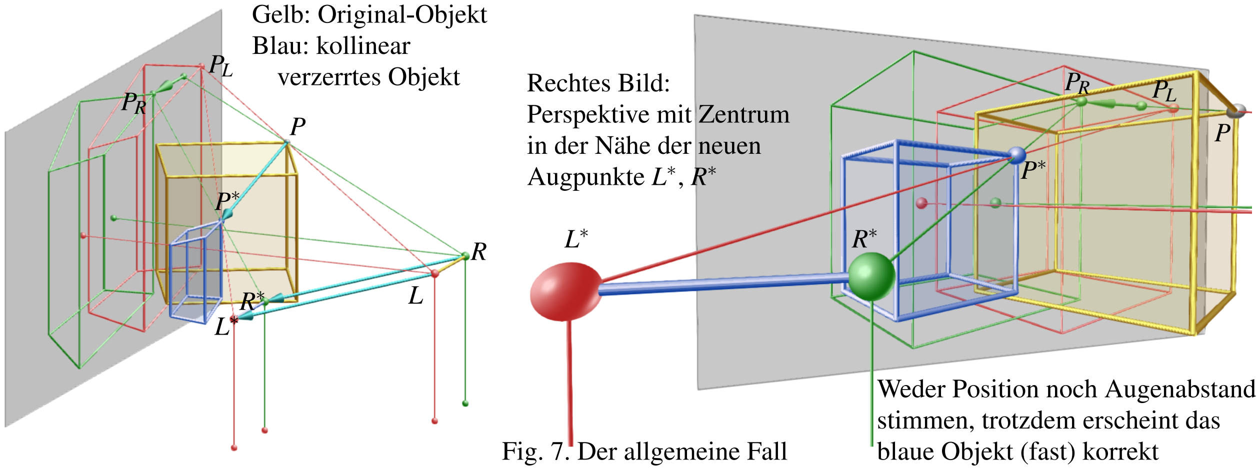

Fig. 7. Der allgemeine Fall

Wir wollen gleich für den allgemeinen Fall beweisen (Fig. 7), dass die Abbildung *Original*$\longleftrightarrow$*virtuelles Objekt* in jedem Fall linear, also geradentreu ist: Sei g eine Gerade im realen Raum. Ihr entsprechen zwei Bildgeraden g_L oder g_R im Schnitt der Bildebene mit den Sehebenen durch L und R. Nun wird aus zwei neuen Punkten L^* und R^* projiziert, was auf den Schnitt g^* zweier neuer Sehebenen führt. Es muss jedoch die Achse L^*R^* parallel zur Achse LR sein (was automatisch bedeutet, dass beide verschobenen Bilder wieder „in der gleichen Höhe sind“), denn sonst schneiden einander die neuen Sehstrahlen nicht mehr und der Raumeindruck „bricht zusammen“.

Das Rekonstruieren aus zwei Perspektiven funktioniert also recht unkritisch. Das gilt sogar für „nicht-klassische Perspektiven“, also z.B. „Fischaugenperspektiven“, die bei den beliebten „Actioncameras“ auftreten: Man sieht dann *räumliche* Fischaugenperspektiven! Bei nicht-technischen Objekten ohne ausgeprägte rechte Winkel (Fig. 5) fällt das kaum auf.

… und ein relativierender Nachsatz

Trotz der obigen Ergebnisse werden stereoskopische Fotos und Filme nicht von allen gleichermaßen beeindruckend empfunden. Während manche Personen Raumbilder auf Anhieb aus allen möglichen Positionen sehen, brauchen andere dazu für sie maßgeschneiderte Bedingungen und klagen nach geraumer Zeit mitunter über Schwindel oder Kopfschmerzen.

Georg Glaeser