Österreichische
Mathematische
Gesellschaft

MATHE-BRIEF

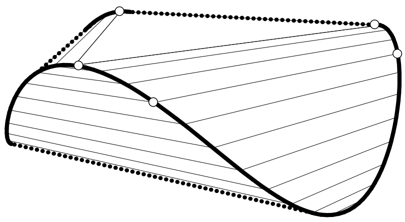
Juni 2015 — Nr. 59

Herausgegeben von der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft
http: // www.oemg.ac.at / Mathe–Brief ——— mathe–brief@oemg.ac.at

ABWICKELBARE FLÄCHEN UND KURVEN-FALTEN

Abwickelbare Flächen sind solche, die ohne Zerreißen und Verknittern auf längentreue Art und Weise in eine Ebene ausbreitbar („abwickelbar“) sind, also im wesentlichen genau diejenigen Flächen, die man durch Verbiegen aus einem Blatt Papier erhalten kann. Es ist üblich, dabei Kanten zuzulassen, und eine Fläche auch dann als abwickelbar zu bezeichnen, wenn man sie vor der eigentlichen Abwicklung aufschneiden muss: Dann ist zum Beispiel ein Drehzylinder abwickelbar.[*]

Bereits im 16. Jahrhundert war Kartographen klar, dass kein Teil der Erdkugel abwickelbar ist, und es aus diesem Grund zwar winkeltreue und flächentreue, aber keine längentreuen Landkarten gibt. Erst im Rahmen des Ausbaus der Differentialgeometrie ab dem 18. Jahrhundert wurde die Struktur der abwickelbaren Flächen geklärt. Sie sind zusammengesetzt aus *torsalen Regelflächen*, welche die Eigenschaft haben, dass sie auf einer Ebene abrollen können, sodass längs einer ganzen Geraden („Erzeugenden“) Berührung zwischen der Ebene und der Fläche herrscht. Dieser Bewegungsvorgang kann auch umgekehrt werden: Links unten sieht man eine abwickelbare Fläche, die durch das Abrollen einer Ebene auf einer Kurve (fett) entstanden ist: Einige Berührerzeugenden sind eingetragen. Unter diesen sind auch (dick punktiert) Teile des Umrisses der Fläche. Es ist nicht schwer, sich zu überlegen, dass eine Fläche genau dann abwickelbar ist, wenn alle Umrisse für jedwede Blickrichtung geradlinig sind.

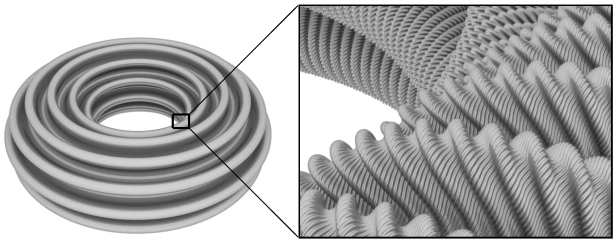


Dieser visuelle Test entlarvt zum Beispiel die Oberfläche der *Disney Concert Hall* in Los Angeles (rechts) als nicht ganz abwickelbar, denn man kann auch nicht-geradlinige Umrisse sehen. Leider ist die obige Beschreibung der abwickelbaren Flächen aus Sicht eines Mathematikers nur eingeschränkt richtig. Sie gilt im wesentlichen dann, wenn Krümmungsstetigkeit der beteiligten Flächen (zumindest stückweise) vorausgesetzt wird. Die präzisen Formulierungen sind umständlich. Auch einer der beiden heurigen Abelpreisträger, Louis Nirenberg, hat einen von ihm selbst als elementar bezeichneten Beitrag zur Existenz von Erzeugenden auf abwickelbaren Flächen geliefert.[**]

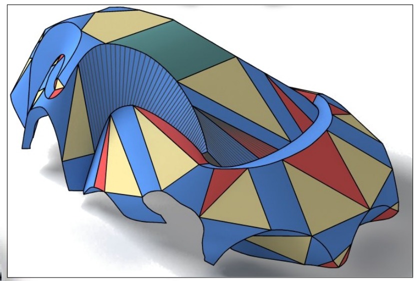
Überhaupt nicht elementar ist ein berühmtes Ergebnis des anderen Abelpreisträgers, John Nash.[***] Wir wollen es so illustrieren: Man kann ein Rechteck durch Verbiegen und Verkleben gegenüberliegender Seiten zu einem Zylinder machen. Es wird aber durch Versuche bald klar, dass man unmöglich durch weiteres Verbiegen eine glatte Fläche erzeugen kann, die längentreu auf das Rechteck bezogen ist, bei welcher aber noch zusätzlich die restlichen beiden gegenüberliegenden Seiten verklebt sind. Versuche, einen Zylinder im Kreis zu biegen, führen nicht zum Ziel.

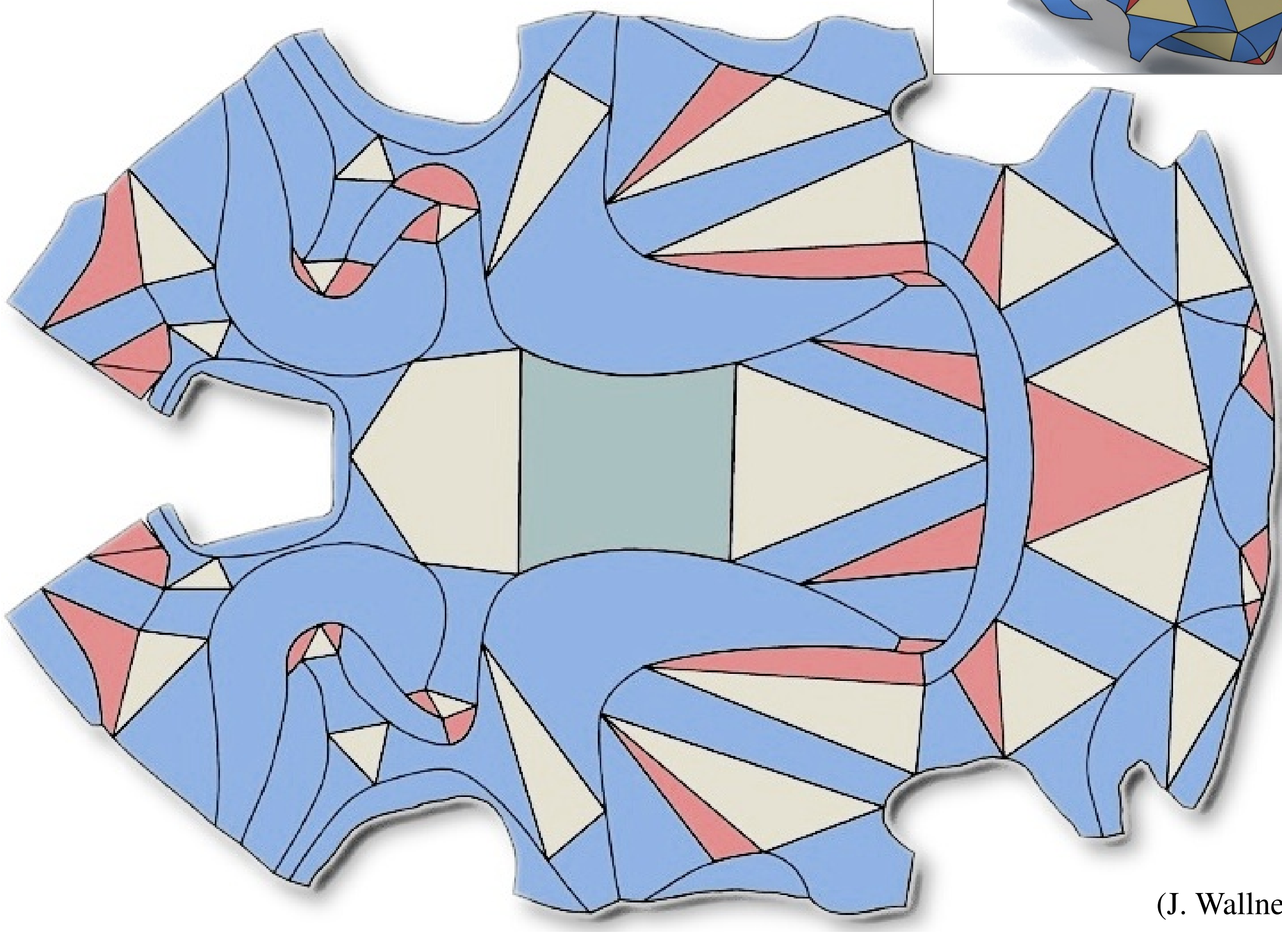
[*] Die exakte Definition der Abwickelbarkeit verwendet den Begriff der lokalen Isometrie zum $\mathbb{R}^2$. [**] P. Hartman, L. Nirenberg: On spherical image maps whose Jacobians do not change sign. *Amer. J. Math.* 81 (1959), 901–920. [***] J. Nash: C^1 isometric imbeddings. *Annals of Math.* 60 (1954), 383–396.

Eine solche „unmögliche“ Fläche, deren Existenz aus dem C^1-Einbettungssatz von John Nash folgt, konnte erst jüngst explit angegeben werden[*] (rechts). Diese Fläche sieht aus der Ferne wie ein Torus aus, hat jedoch Rippen, welche wiederum Rippen tragen und so weiter. Die *praktische Herstellung* von abwickelbaren Flächen ist ein faszinierendes Thema mit einem starken Bezug zu Origami, wenn man Herstellung durch Falten aus einem einzigen Stück Papier (jedoch auch entlang gekrümmter Faltlinien) fordert. Das Objekt links wurde zum Beispiel durch Falten eines Kreisrings längs konzentrischer Kreise von Erik und Martin Demaine (M.I.T.) erzeugt. Auf der Webseite *http://erikdemaine.org/curved* geben diese beiden einen historischen Überblick über das Thema, der bis zum Bauhaus des Jahres 1926 zurückreicht. Die Geometrie solcher Flächen is voller offener Fragen, insbesondere ist vielfach ihre Existenz im mathematischen Sinn ungeklärt.



Wir wollen mit einem Hinweis auf neuere algorithmische Arbeiten zu dem Thema[**] schließen und präsentieren einen daraus entnommen Auschneide- und Faltplan für ein abwickelbares Auto, entworfen von Gregory Epps (Faltvorgang siehe *http://www.curvedfolding.com/video/approximated-folding-animation-1*).





(J. Wallner)

[*] V. Borrelli, S. Jabrane, F. Lazarus, B. Thibert: Flat tori in three-dimensional space and convex integration. *Proc. Nat. Ac. Sc.* 109 (2012), 7219–7223 [**] M. Kilian, S. Flöry, Z. Chen, N. Mitra, A. Sheffer, H. Pottmann: Curved Folding. *ACM Trans. Graphics* 27/3, paper 75, Proc. SIGGRAPH 2008. Außerdem: C. Tang, P. Bo, J. Wallner, H. Pottmann: Interactive design of developable surfaces, preprint 2015.