Österreichische Mathematische Gesellschaft

MATHE-BRIEF

Mai 2015 — Nr. 58

Herausgegeben von der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft
http://www.oemg.ac.at/Mathe–Brief ——— mathe–brief@oemg.ac.at

Approximation von Quadratwurzeln

Vor der Erfindung elektronischer Rechner hat man viel Mühe verwendet oder verschwendet, Algorithmen zur Approximation von Quadratwurzeln zu finden. Ein bemerkenswertes Resultat ist mit G. Stratemeyer [3] verbunden:

Man wähle eine ganze Zahl $t_0 \geq 2$ und berechne mittels der Rekursionsformel

$$t_{k+1} = 2t_k^2 - 1$$

die Folge $t_0, t_1, t_2, \ldots$. Mit vollständiger Induktion nach k lässt sich $t_k > 2^k$ zeigen (mit etwas mehr Sorgfalt sogar $t_k > 2^{2k}$), was wir später brauchen: Für $k = 0$ ist $t_0 \geq 2 > 2^0 = 1$, und $t_{k+1} = 2t_k^2 - 1 > 2 \cdot 2^{2k} - 1 = 2^{2k+1} - 1 > 2^{k+1}$.

Interessant ist die Beziehung

$$\begin{aligned} \sqrt{t_{k+1}^2 - 1} &= \sqrt{(2t_k^2 - 1)^2 - 1} \\ &= \sqrt{4t_k^4 - 4t_k^2 + 1 - 1} \\ &= 2t_k \sqrt{t_k^2 - 1} \end{aligned}$$

Eine einfache Rechnung ergibt

$$\begin{aligned} 2t_k^2 - 2t_k\sqrt{t_k^2 - 1} &= 1 + t_{k+1} - \sqrt{t_{k+1}^2 - 1} \\ t_k - \sqrt{t_k^2 - 1} &= \frac{1}{2t_k} + \frac{t_{k+1} - \sqrt{t_{k+1}^2 - 1}}{2t_k}, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} t_0 - \sqrt{t_0^2 - 1} &= \frac{1}{2t_0} + \frac{t_1 - \sqrt{t_1^2 - 1}}{2t_0} \\ t_1 - \sqrt{t_1^2 - 1} &= \frac{1}{2t_1} + \frac{t_2 - \sqrt{t_2^2 - 1}}{2t_1} \\ t_2 - \sqrt{t_2^2 - 1} &= \frac{1}{2t_2} + \frac{t_3 - \sqrt{t_3^2 - 1}}{2t_2} \\ &\cdots \end{aligned}$$

Wenn man jeweils eine Gleichung in die vorhergehende Gleichung einsetzt und das k-mal unternimmt, erhält man

$$t_0 - \sqrt{t_0^2 - 1} = \frac{1}{2t_0} + \frac{1}{2t_0 2t_1} + \frac{1}{2t_0 2t_1 2t_2} + \cdots + \frac{1}{2^k t_0 t_1 \cdots t_{k-1}} + \frac{t_k - \sqrt{t_k^2 - 1}}{2^k t_0 t_1 \cdots t_{k-1}}.$$

Der Zähler des letzten Bruches ist kleiner als 1: Wegen $2t_k > 2^{k+1} \geq 2$ ist $t_k^2 - 1 > t_k^2 - 2t_k + 1 = (t_k - 1)^2$ und $t_k - \sqrt{t_k^2 - 1} < t_k - \sqrt{(t_k - 1)^2} = 1$. Deshalb ist grob geschätzt

$$\frac{t_k - \sqrt{t_k^2 - 1}}{2^k t_0 t_1 \cdots t_{k-1}} < \frac{1}{2^{2k}}$$

und für $k \to \infty$ ergibt sich die schöne Reihe

$$t_0 - \sqrt{t_0^2 - 1} = \frac{1}{2t_0} + \frac{1}{2t_0 \cdot 2t_1} + \frac{1}{2t_0 \cdot 2t_1 \cdot 2t_2} + \cdots$$

bzw. die Darstellung

$$\sqrt{t_0^2 - 1} = t_0 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2t_0 \cdot 2t_1 \ldots \cdot 2t_{k-1}}.$$

Nimmt man etwa $t_0 = 2$, so erhält man $t_1 = 7$, $t_2 = 97$ usw. und die Reihe

$$\sqrt{3} = 2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{56} - \frac{1}{10476} - \cdots,$$

die eine sehr gute Näherung liefert! Schon die ersten drei Glieder liefern die gute Approximation von oben

$$\sqrt{3} \sim 1,732142857142857.$$

Der korrekte Wert ist

$$\sqrt{3} = 1{,}732050807568877\ldots$$

Viel früher hat man schon entdeckt, dass für dieselbe Folge auch die Beziehung

$$\sqrt{\frac{t_k + 1}{t_k - 1}} = \frac{t_k + 1}{t_k} \sqrt{\frac{t_{k+1} + 1}{t_{k+1} - 1}}$$

gilt. Tatsächlich ist

$$\begin{aligned} \frac{t_k + 1}{t_k} \sqrt{\frac{t_{k+1} + 1}{t_{k+1} - 1}} &= \frac{t_k + 1}{t_k} \sqrt{\frac{2t_k^2}{2t_k^2 - 2}} \\ &= \frac{t_k + 1}{t_k} \frac{t_k}{\sqrt{(t_k + 1)(t_k - 1)}} \\ &= \sqrt{\frac{t_k + 1}{t_k - 1}} \end{aligned}$$

Daraus leitet man das unendliche Produkt

$$\sqrt{\frac{t_0 + 1}{t_0 - 1}} = \prod_{k=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{t_k}\right)$$

her, das konvergiert, weil $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{t_k} < \infty$ (vgl. z.B.[2]). Setzt man hier wieder $t_0 = 2$, so ergibt das

$$\sqrt{3} = \left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{7}\right)\left(1+\frac{1}{97}\right)...$$

Hier ergeben die ersten beiden Faktoren immerhin schon die untere Näherung

$$\sqrt{3} \sim \frac{12}{7} \sim 1,714285714285714...$$

Wer etwas mehr darüber erfahren will, sei auf das schöne alte Buch [1] von Oskar Perron, *Irrationalzahlen* verwiesen.

Literatur

[1] PERRON, OSKAR, KONRAD: *Irrationalzahlen* Chelsea Publishing Company, New York 1951.

[2] V.MANGOLDT, H./KNOPP, KONRAD: *Einführung in die höhere Mathematik, zweiter Band* Verlag S. Hirzel, Leipzig 1932.

[3] STRATEMEYER, G.: *Entwicklung positiver Zahlen nach Stammbrüchen* (Dissertation). Mitteil. des mathem. Seminars d. Universität Gießen, Bd. II, Heft 20 (1931).

F. Schweiger