Österreichische Mathematische Gesellschaft

MATHE-BRIEF

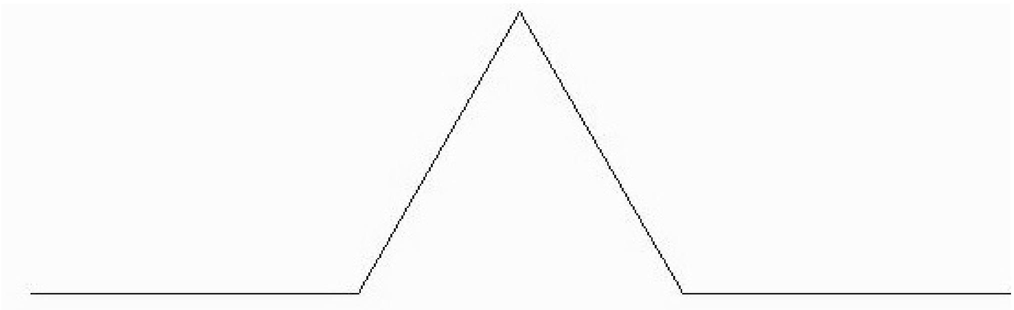
März 2015 — Nr. 56

Herausgegeben von der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft
http: // www.oemg.ac.at / Mathe–Brief ——— mathe–brief@oemg.ac.at

Die Koch-Kurve

Unser Ziel ist die Konstruktion einer bemerkenswerten Kurve in der Ebene: sie hat den Anfangspunkt $A = (0 \mid 0)$, den Endpunkt $B = (1 \mid 0)$, hat im Dreieck mit den Eckpunkten A, B, $C = (\frac{1}{2} \mid \frac{\sqrt{3}}{6})$ Platz, ist aber unendlich lang, nirgends differenzierbar und in einem bestimmten Sinn (der durch ihre *Dimension* grösser als 1 und kleiner als 2 ausgedrückt wird) „dicker als eine Linie“ aber „dünner als ein Flächenstück“.

Die Konstruktion verläuft schrittweise und sehr einfach: Wir beginnen mit dem Einheitsintervall $[A,B]$ und ersetzen das mittlere Drittel durch zwei Seiten des darüber errichteten gleichseitigen Dreiecks (Figur 1).



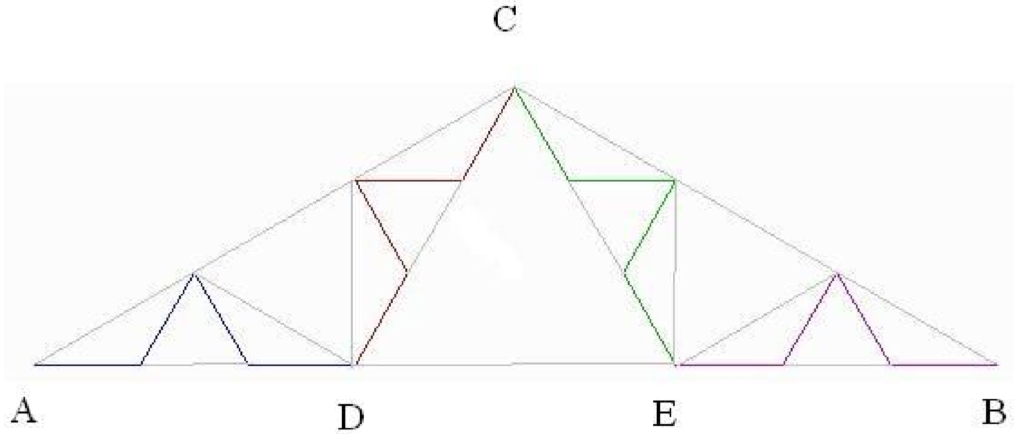
Figur 1

Mathematisch gesprochen erhalten wir den Graphen einer stetigen stückweise linearen Funktion f_1, die auf dem Einheitsintervall gegeben ist durch

$$f_1(x) = \begin{cases} 0 & (0 \le x \le \frac{1}{3}) \\ \sqrt{3}\left(x - \dfrac{1}{3}\right) & (\frac{1}{3} \le x \le \frac{1}{2}) \\ \dfrac{\sqrt{3}}{6} - \sqrt{3}\left(x - \dfrac{1}{2}\right) & (\frac{1}{2} \le x \le \frac{2}{3}) \\ 0 & (\frac{1}{3} \le x \le 1) \end{cases}$$

Wenn wir uns die Freiheit nehmen, diesen Graphen als ’Kurve’ TI zu bezeichnen (wir haben auf das Einheitsintervall I eine Transformation T ausgeübt), dann besteht diese Kurve aus 4 aneinanderhängenden Segmenten der Länge $\frac{1}{3}$. Ihre Gesamtlänge ist also $\frac{4}{3}$. Im folgenden interpretieren wir f_1 als Abbildung des Einheitsintervalles in die Ebene $\mathbb{R}^2$, die dem Argument $x \in I$ den Punkt $f_1(x) \in \mathbb{R}^2$ des Graphen mit der ersten Koordinate x zuordnet.

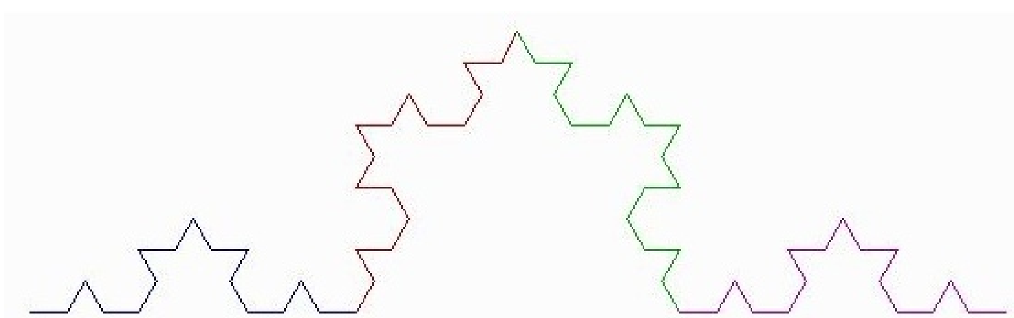
Nach diesem ersten Schritt bedienen wir uns der einfachen mit T bezeichneten Vorschrift: ersetze jedes vorliegende Segment durch eine entsprechend verkleinerte Kopie der Kurve TI. Wenn wir T jetzt in einem zweiten Schritt auf die Kurve TI ausüben, liefert uns das eine neue stetige stückweise lineare Kurve T^2I, die aus 4^2 aneinanderhängenden Segmenten der Länge $\frac{1}{3^2}$ besteht, also die Gesamtlänge $\left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$ hat (Figur 2).



Figur 2

Wir können sie auffassen als 'Graphen' einer Funktion $f_2 = Tf_1$, die das Einheitsintervall in die Ebene $\mathbb{R}^2$ abbildet, aber jeweils auf dem Intervall $[\frac{k}{9}, \frac{k+1}{9}]$ $(0 \leq k < 9)$ durch eine neue geeignete stückweise lineare Abbildung dieses Intervalles in die Ebene. Wir können uns auch noch Gedanken machen über die 'Abweichung' der neuen Funktion f_2 von der Funktion f_1 (d.h. also vom 'Abstand' der Kurve T^2I von der Kurve TI): weil auf jedem Segment der Kurve TI, das die Länge $\frac{1}{3}$ hatte, nur ein 'Buckel' der Höhe $\frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{1}{9} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$ angebracht wurde, ist die 'Abweichung' $\|f_2 - f_1\| = \sup_{0 \leq x \leq 1} \|f_2(x) - f_1(x)\| = \frac{1}{9} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$, das ist also ein Drittel der 'Abweichung' $\|f_1 - f_0\| = \sup_{0 \leq x \leq 1} \|f_1(x) - (x,0)\| = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$ der Funktion $f_1 = Tf_0$ von unserer Ausgangsfunktion f_0, die jedem $x \in I$ den Punkt $(x,0)$ zuordnet.

Jeder weitere Konstruktionsschritt besteht nun aus einer weiteren Anwendung der Transformation T. Dabei wird die Anzahl der vorliegenden Segmente mit 4 multipliziert, ihre Länge aber auf ein Drittel reduziert. Nach k Schritten liefert das eine Kurve T^kI, die Graph einer stetigen stückweise linearen Funktion $f_k = T^kf_0$ ist. Sie hat also die Gesamtlänge $4^k \cdot \frac{1}{3^k} = \left(\frac{4}{3}\right)^k$. Ihre Abweichung von der vorhergehenden Funktion f_{k-1} beträgt $\|f_k - f_{k-1}\| = \left(\frac{1}{3}\right)^k \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$ (Figur 3).



Figur 3

Erfreulicherweise konvergiert für jedes $x \in I = [0,1]$ die Folge der Funktionswerte $\{f_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ gegen einen — natürlich von x abhängigen — Grenzwert.

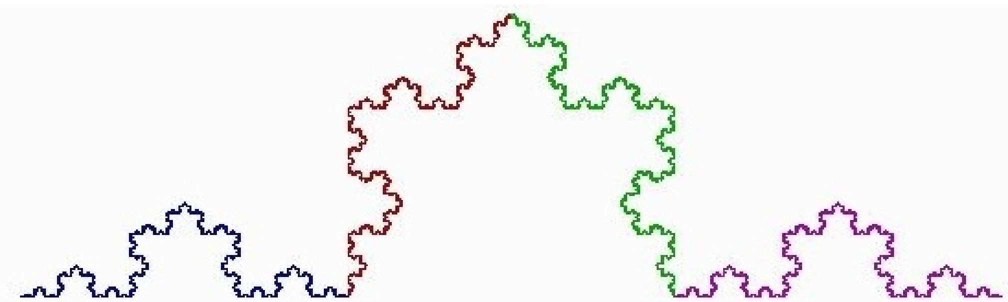
Um das einzusehen, erinnern wir uns an das Cauchy-Kriterium für die Konvergenz einer Folge $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ in der Ebene: sie konvergiert genau dann, wenn ab einem geeigneten Index k_0 der Abstand je zweier folgender Glieder $\|a_n - a_m\|$ $(k_0 \leq m \leq n)$ beliebig klein wird. In unserem Falle gilt

$$\begin{aligned}
\|f_n(x) - f_m(x)\| &\leq \|f_n - f_m\| \\
&\leq \|f_{m+1} - f_m\| + \|f_{m+2} - f_{m+1}\| + \cdots + \|f_n - f_{n-1}\| \\
&\leq \sum_{j=m+1}^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^j \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\
&\leq \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sum_{j=k_0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^j \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{k_0+1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{k_0}}{\frac{1}{3} - 1} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{k_0}
\end{aligned}$$

Diese letzte Schranke wird für genügend großes k_0 beliebig klein, also konvergiert die Folge $\{f_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ gegen einen Grenzwert

$$f_\infty(x) = \lim_{k \to \infty} f_k(x).$$

Weil diese Schranke sogar nur von k_0, nicht aber von x abhängig ist, konvergiert die Folge der Funktionen $\{f_k\}_{k=0}^{\infty}$ sogar „gleichmäßig". Nach einem bekannten Satz der Analysis ist die Grenzfunktion f_∞ als gleichmäßiger Grenzwert einer Folge von stetigen Funktionen wieder eine stetige Funktion. Ihr Graph ist die nach dem dänischen Mathematiker H. VON KOCH benannte „Koch-Kurve" (Figur 4).



Figur 4

Jedes der beiden gleichschenkeligen Dreiecke ACD und BCE ist ähnlich dem gleichschenkeligen Dreieck ABC. Das hat zur Folge, dass die Anwendung von T auf jedes der Segmente AD, DC, CE, EB eine Kopie von TI liefert, die wieder im Dreieck ABC enthalten ist (Figur 2), und damit auch jede der Kurven $T^kI (0 \leq k)$. Dann ist aber auch die Grenzwert-Kurve $T^\infty I$, der Graph der Funktion f_∞, in diesem Dreieck enthalten.

Die Endpunkte alle Segmente, aus denen sich T^kI zusammensetzt, bleiben bei jeder weiteren Anwendung von T an ihrem Platz, sind also auch Punkte der Kurve $T^\infty I$. Die Kurve T^kI besteht also aus aneinanderfolgenden Sehnen der Kurve $T^\infty I$. Die Gesamtlänge dieser Sehnenfolge ist $\left(\frac{4}{3}\right)^k \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$; sie wird für wachsendes k beliebig groß , also ist die Kurve $T^\infty I$ unendlich lang.

Wenn die Kurve $T^\infty I$ als Graph der Funktion $T^\infty f_0$ in einem Punkt P differenzierbar wäre, würde das heissen, dass sie in diesem Punkt eine Tangente hätte. In einem beliebig kleinen Kreis mit dem Mittelpunkt P liegt aber für hinreichend großes k eine (sehr kleine) Kopie $T^k(ABC)$ des Dreiecks ABC. Die Verbindung von P mit den Eckpunkten dieses Dreiecks liefert Sehnen, die nicht alle gleichzeitig nahe bei einer einzigen Geraden sein können; also gibt es in P keine Tangente, die ja eine Grenzlage von Sekanten sein müsste, die P mit naheliegenden Kurvenpunkten verbinden.

Die Kurve $T^\infty I$ hat noch eine bemerkenswerte Eigenschaft, von der bisher noch keine Rede war: weil wir sie durch fortgesetzte Anwendung von T auf die vier Segmente AD, DC, CE, EB erhalten, besteht sie aus vier ähnlichen Kopien ihrer selbst — sie ist „selbstähnlich". Weil das auch für jede dieser Kopien zuitrifft, besteht sie sogar aus beliebig vielen verkleinerten Kopien ihrer selbst. Das hat eine entscheidende Folge für eine geometrische Maßzahl, ihre „Dimension".

Wenn wir uns fragen, warum ein Intervall die Dimension 1 hat, ein Quadrat die Dimension 2, oder ein Würfel die Dimension 3, so ist die Antwort: ein Intervall besteht aus n^1 mit dem Faktor $\frac{1}{n}$ verkleinerten Kopien seiner selbst, ein Einheits-Quadrat ist zusammengesetzt aus n^2 Quadraten der Seitenlänge $\frac{1}{n}$, und ein Würfel mit Kantenlänge 1 besteht aus n^3 kleinen Würfeln mit Kantenlänge $\frac{1}{n}$. Allgemeiner, wenn ein geometrisches Objekt zusammengesetzt ist aus $N = n^d$ Objekten, die mit dem Ähnlichkeits-Faktor $\frac{1}{n}$ verkleinerte Kopien diese Objektes sind, dann kann $d = \frac{\log N}{\log n}$ als (Selbstähnlichkeits-)Dimension diese Objektes bezeichnet werden. Angewandt auf die Koch-Kurve ergibt das als ihre (Selbstähnlichkeits-)Dimension $\frac{\log 4}{\log 3} \approx 1,26$.

Gilbert Helmberg

Literatur

ADDISON, PAUL S.: *Fractals and Chaos: an Illustrated Course.* Institute of Physics Publishing, Bristol 1997.

BARNSLEY, MICHAEL: *Fractals Everywhere.* Academic Press, Inc., Toronto 1988.

EDGAR, G.A. *Measure, Topology, and Fractal Geometry*. Springer, Berlin New York 1990.

HELMBERG, G.: *Getting Acquainted with Fractals.* DeGruyter, Berlin New York 2007.

KOCH, H. VON: *Sur une courbe continue sans tangente, obtenue par une construction geometrique elementaire.* Arkiv főr Matematik I (1904).

ZEITLER, HERBERT/PAGON, DUSAN: *Fraktale Geometrie. Eine Einfűhrung.* Vieweg, Braunschweig 2000.