Österreichische
Mathematische
Gesellschaft

MATHE-BRIEF

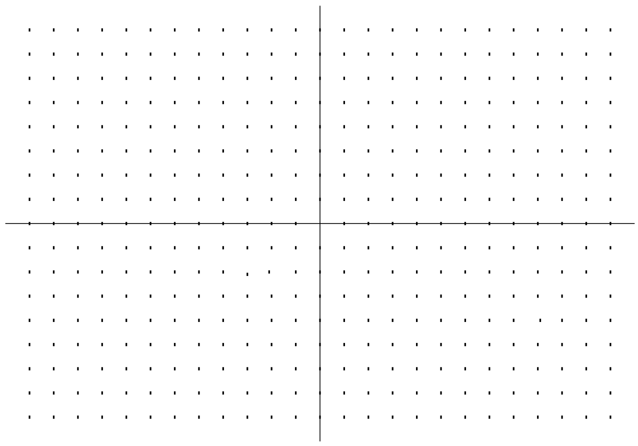
Februar 2015 — Nr. 55

Herausgegeben von der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft
http:// www.oemg.ac.at / Mathe–Brief ——— mathe–brief@oemg.ac.at

Im Dickicht der Gitterpunkte

Es ist immer wieder erstaunlich, dass auch sehr abstrakte Teilgebiete der Mathematik mitunter anhand von sehr anschaulichen Problemen illustriert werden können. Ein Beispiel dazu, betreffend diophantische Approximation, möchte ich als Anregung zur näheren Untersuchung im Wahlpflichtfach oder im Rahmen einer Fachbereichsarbeit vorstellen.

Als Spielwiese für alle folgenden Überlegungen dient die zweidimensionale Ebene und deren sämtliche Punkte mit ganzen Koordinaten, anders ausgedrückt das vollständige Gitter $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ in $\mathbb{R}^2$, oder konkreter ein unendlich ausgedehnter Wald bestehend aus zylindrischen Bäumen vom Durchmesser 0, die vollkommen regelmäßig in quadratischer Anordnung im Abstand 1 gepflanzt wurden. Aus der Vogelperspektive böte sich dann folgender Anblick:



Anstelle des Baums in $(0,0)$ postieren wir einen Beobachter, der in alle Himmelsrichtungen blicken kann und versuchen, sein Blickfeld zu beschreiben.

Folgende Fragen können dazu bearbeitet werden:

(1) Welche Bäume kann der Beobachter aus seiner Position sehen und welche sind durch andere Bäume verdeckt?
(2) Wie groß ist der Anteil der Bäume, die innerhalb eines gegebenen Radius vom Ursprung aus sichtbar sind?
(3) In welche Richtungen wird sein Blick, egal wie weit dieser reicht, überhaupt keinen Baum treffen?

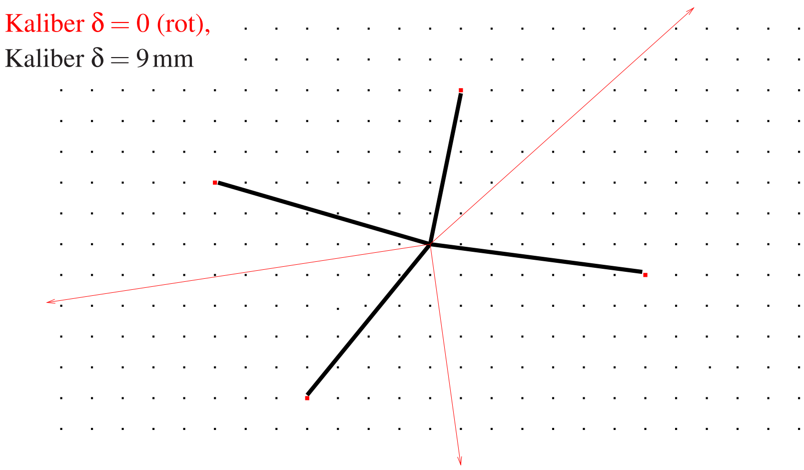
Die Antwort auf Frage 1 führt klarerweise auf den Begriff der Teilerfremdheit bzw. der primitiven Gitterpunkte und diejenige auf Frage 3 auf die Unterscheidung zwischen rationalen und irrationalen Zahlen, wenn man die Blickrichtung durch den Anstieg einer Geraden im Koordinatensystem parametrisiert. Frage 2 ist wesentlich komplexer und hat mit der Wahrscheinlichkeit zu tun, dass zwei beliebig ausgewählte ganze Zahlen teilerfremd sind. (x, y) ist genau dann primitiv, wenn weder 2, noch 3, noch 5, noch eine andere Primzahl ein gemeinsamer Teiler von x und y ist. Für jede Primzahl p ist die Wahrscheinlichkeit, daß p weder x noch y teilt gleich 1 weniger die Wahrscheinlichkeit, daß p sowohl x als auch y teilt, also gleich $1-(1/p)^2$. Über die Gesamtheit aller Primzahlen ausgedehnt ergibt sich damit heuristisch gerade

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{25}\right)\cdots \;=\; \prod_{p\in\mathbb{P}}\left(1-\frac{1}{p^2}\right) \;=\; \frac{1}{\zeta(2)}=\frac{6}{\pi^2},$$

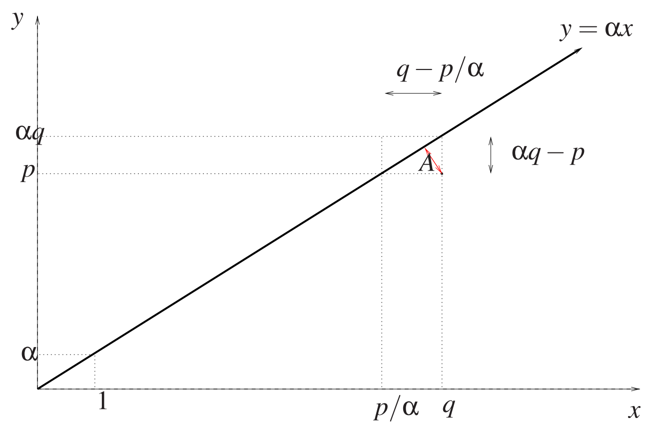
wobei der genaue Wert dieses Produkts und der rigorose Beweis für diese Aussage didaktisch wohl weniger von Bedeutung sind, als eine Veranschaulichung samt numerischer Auswertung. Es können etwa primitive Gitterpunkte, deren Abstand zum Ursprung durch einen immer größer werdenden Parameter beschränkt ist, abgezählt werden, was zur Beobachtung führen soll, dass der Anteil dieser Gitterpunkte gegen einen Wert um die 60% zu konvergieren scheint.

Nun ist es aber an der Zeit, unser Problem noch realistischer zu machen, wofür sich zwei Varianten anbieten, die beide interessante Zugänge zur Diophantischen Approximation bieten.

Einerseits können wir unseren Beobachter durch einen Schützen ersetzen und demzufolge die Blickrichtung durch die Schussrichtung. Bei Projektilen vom Kaliber null, also ohne Durchmesser, ändert dies nichts, aber was passiert, wenn die Projektile positiven Durchmesser δ, etwa Kaliber 9mm, haben? Gibt es dann immer noch Richtungen, in die niemals ein Baum angeschossen wird?



Bei gegebener Schussrichtung (wieder parametrisiert durch den Anstieg α) hängt dies offensichtlich davon ab, wie nahe an der Schussbahn Gitterpunkte liegen. Ist $\alpha = a/b$ rational, so verläuft der Schusskanal direkt durch den Gitterpunkt (a, b) und wird daher aufgehalten. Ist α irrational, so wird der Schuss genau dann aufgehalten, wenn ein Gitterpunkt (q, p) existiert, dessen Abstand A zur Geraden $y = \alpha x$ kleiner als $\delta/2$ ist.



Wie man leicht nachrechnet, ist dieser Abstand höchstens gleich $|\alpha q - p|$ (siehe Skizze), und der Schuss wird sicher aufgehalten, wenn

$$\left|\alpha q - p\right| < \frac{\delta}{2} \iff \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{\delta}{2|q|}.$$

An dieser Stelle ist nun etwas Theorie in Form des Dirichletschen Approximationssatzes von Nutzen. Dieser besagt:

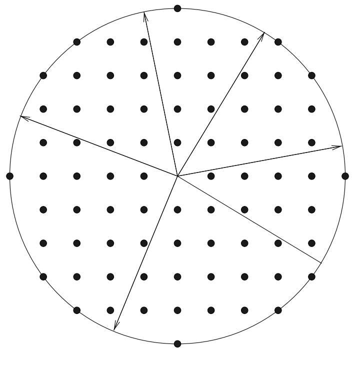
Satz 1. *Sei $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Dann existieren unendlich viele rationale p/q für die gilt:*

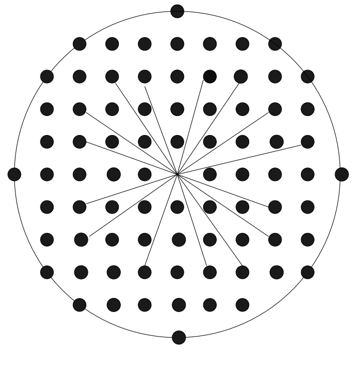
$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}.$$

Die Nenner q dieser rationalen Approximationen können aber nicht beschränkt sein und daher muss sicher $q > 2/\delta$ für mindestens ein q erfüllt sein, sodass das Projektil vom Kaliber δ durch den Baum in (q, p) aufgehalten wird.

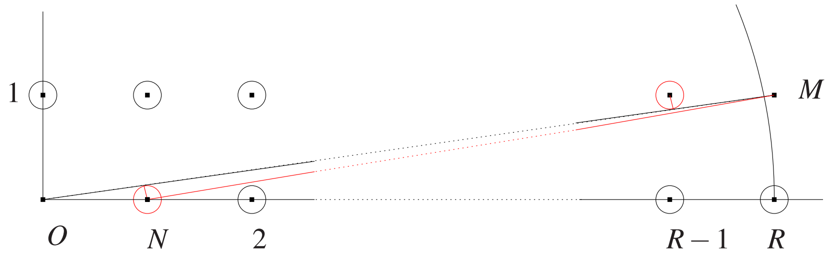
Zum Beweis des Dirichletschen Approximationssatzes ist zu sagen, dass dieser ganz elementar geführt werden kann und eine ausgezeichnete Möglichkeit bietet, das Schubfachprinzip zu erklären.

Nun aber zur zweiten Möglichkeit unserem Beobachter das Leben schwer zu machen. Lassen wir die Bäume wachsen, d.h. einen positiven Stammdurchmesser d annehmen und gleichzeitig den Wald auf ein kreisförmiges Gebiet mit Radius R beschränken. Die offensichtliche Frage ist nun: ab welchem Wert von d wird es keine Richtung mehr geben, in die der Beobachter aus dem Wald heraussehen kann?





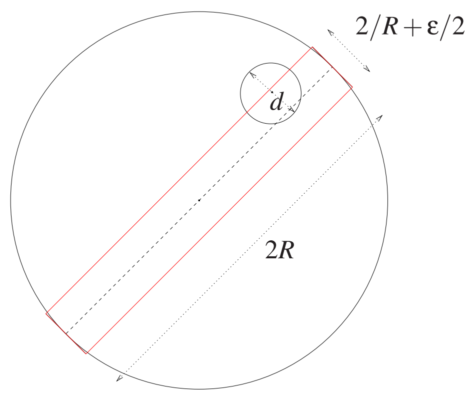
Dazu soll zunächst eine Abschätzung für d gegeben werden, die garantiert, daß der Beobachter in $O := (0,0)$ zwischen den Gitterpunkten $(R,0)$ und $(R-1,1)$ in Richtung $M := (R,1)$ noch hinausblicken kann. Die Skizze zeigt, daß die beiden der Blickachse nächstgelegenen Bäume diejenigen in $N := (1,0)$ und $(R-1,1)$ sind, sodaß diese den Stammdurchmesser d begrenzen.



Man kann den Fächeninhalt des Dreiecks OMN (die fehlende Seite MN ist in rot ergänzt) mittels der Formel $1/2 \times$ Grundlinie $\times$ Höhe nun auf zwei verschiedene Arten berechnen: einmal mit ON (Länge 1) als Grundlinie und Höhe 1, woraus sich $1/2$ als Fächeninhalt ergibt, andererseits mit OM als Grundlinie (Länge $\sqrt{R^2+1}$) und der Hälfte des gesuchten maximalen Stammdurchmessers (ebenfalls in rot) des Baums in N als Höhe. Die daraus resultierende Beziehung zwischen d und R sowie eine analoge Überlegung für den Baum in $(R-1,1)$ liefern, daß die beiden Bäume die Blickachse berühren, falls $d = 2/\sqrt{R^2+1}$. Hinausblicken ist also für $d < 2/\sqrt{R^2+1}$ zumindest in diese Richtung möglich.

Die Abschätzung von d in die andere Richtung führt wiederum auf ein Approximationsproblem, diesmal über eine Anwendung des Gitterpunktsatzes von Minkowski. Das Ziel ist dabei, zu zeigen, dass kein Blick aus dem Wald hinausgeht, falls $d > 2/R$ gilt. In diesem Fall wähle $\varepsilon > 0$ so, dass $d = 2/R + \varepsilon$.

Die grundlegende Idee, um zur gewünschten Abschätzung zu gelangen, ist in eine beliebige Richtung den Blick zu einem schmalen, den gesamten Wald durchziehenden Rechteck mit Mittelpunkt im Ursprung auszudehnen, das einerseits breit genug ist, einen Gitterpunkt ungleich $(0,0)$ zu enthalten und andererseits schmal genug ist, um zu garantieren, dass der Baum mit Durchmesser d in diesem Gitterpunkt den Blick in die gewählte Richtung versperrt, indem er in die Blickachse hineinragt (siehe Skizze).



Mit einer Länge von $2R$ und der Breite $2/R + \varepsilon/2$ ist letzteres garantiert, da der Baumdurchmesser $d = 2/R + \varepsilon$ größer als die Breite $2/R + \varepsilon/2$ des Rechtecks ist. Für den Flächeninhalt F des

Rechtecks ergibt sich:

$$F = 2R\left(\frac{2}{R} + \frac{\varepsilon}{2}\right) = 4 + \varepsilon R > 4,$$

woraus die Existenz eines Gitterpunkts ungleich $(0,0)$ innerhalb des Rechtecks folgen wird. Dies zu gewährleisten vermag der Gitterpunktsatz von Minkowski:

Satz 2. *Jedes ebene, konvexe Gebiet mit einem Flächeninhalt größer als* 4*, das bezüglich des Ursprungs symmetrisch liegt, enthält außer dem Ursprung einen weiteren Gitterpunkt.*

Auch dieser Satz, sowie der für den Beweis nötige Satz von Blichfeldt, bietet ein lohnendes Fachbereichsarbeitsthema für Schüler, wenn man den Begriff des Flächeninhalts eher intuitiv behandelt. Der Bogen über die hier dargebotenen Zugänge zur diophantischen Approximation schließt sich mit der Bemerkung, dass gerade der Gitterpunktsatz von Minkowski der Schlüssel zu weitreichenden Verallgemeinerungen des Dirichletschen Approximationssatzes ist. Schliesslich kann man den Schusskanal des ersten Zugangs auch sehr schmales Rechteck unendlicher Länge interpretieren, das man an geeigneter Stelle abschneiden kann, wenn der Flächeninhalt hinreichend gross ist. Im Dickicht der Gitterpunkte sind noch viele weitere höchst interessante mathematische Erkenntnisse verborgen, aber ohne die entsprechende Ausrüstung (d.h. Vorkenntnisse) ist ein Durchkommen äußerst schwierig!

Literatur

[1] G. Pólya: Zahlentheoretisches und Wahrscheinlichkeitstheoretisches über die Sichtweite im Walde. *Archiv der Mathematik und Physik (3)* 27 (1918), 135–142.

[2] T.T. Allen: Pólya’s orchard problem. *American Mathematical Monthly* 93 (1986), 98–104.

[3] P.M. Gruber, C.G. Lekkerkerker: *Geometry of numbers*. North Holland, 2. Auflage 1987.

Leonhard Summerer