Österreichische
Mathematische
Gesellschaft

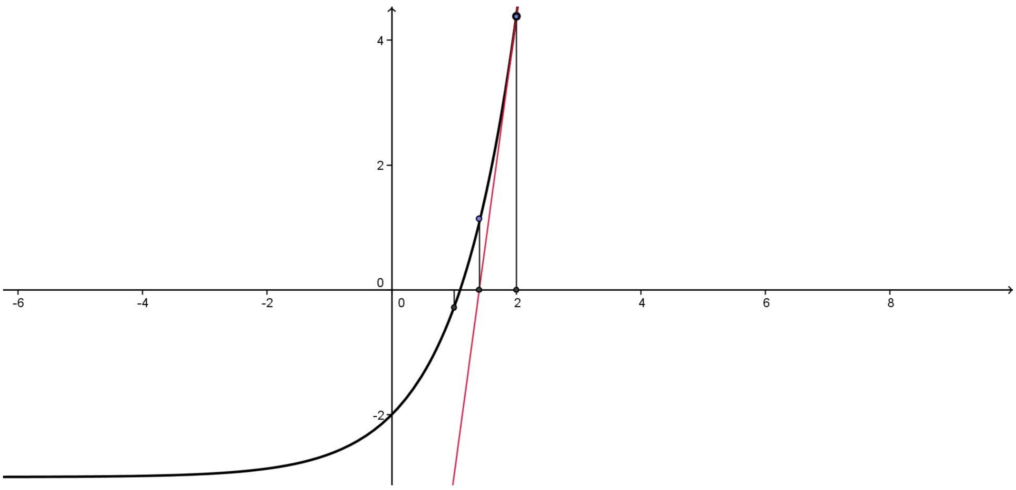
MATHE-BRIEF

Dezember 2014 — Nr. 53

Herausgegeben von der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft
http: // www.oemg.ac.at / Mathe–Brief ——— mathe–brief@oemg.ac.at

Das Newtonsche Näherungsverfahren

Stellen wir uns vor, eine Funktion f einer reellen Variablen x wäre auf einem Intervall der x-Achse gegeben, wie etwa in Figur 1. Damit meinen wir, dass wir zu jedem Wert von x in diesem Intervall den zugehörigen Funktionswert $f(x)$ kennen oder berechnen oder dem Graphen entnehmen können. Uns interessiert die Nullstelle x_0 dieser Funktion, die offenbar zwischen 1 und 2 liegt. Eine grobe Schätzung an Hand der Figur legt einen Näherungswert von $x_0 \approx x_1 = 1{,}1$ nahe.



Figur 1

Wenn wir diesen Wert in die Funktion einsetzen, ergibt das allerdings (weil es sich um den Graphen der Funktion $f(x) = e^x - 3$ handelt) $f(x_1) = e^{1,1} - 3 \approx 0{,}0042$. Wenn wir die Berechnung eines besseren Näherungswertes einem Computer übergeben wollen, könnten wir ihm über ein Programm den folgenden Auftrag geben: beginnend mit dem Intervall $[a, b] = [1, 2]$ berechne den Intervallmittelpunkt $c = \frac{a+b}{2}$ und das Vorzeichen des Funktionswertes $f(c)$. Wenn $f(c)$ positiv ist, ersetze das Intervall $[a, b]$ durch das Intervall $[a, c]$, wenn $f(c)$ negativ ist, ersetze es durch das Intervall $[c, b]$ (wenn $f(c) = 0$, dann können wir aufhören). Nach dem k-ten Programmschritt wird die Nullstelle x_0 durch ein Intervall $[a_k, b_k]$ der Länge $\frac{b-a}{2^k}$ eingeschlossen, und wir können noch bestimmen, nach welchem Programmschritt wir aufhören, weil wir eine genauere Näherung gar nicht brauchen. Eine Durchführung dieses Programmes ergibt der Reihe nach die folgenden Werte:

$[a_0, b_0] = [1, 2]$	$c_0 = \frac{3}{2}$	$f(c_0) > 0$	$b_0 - a_0 = 1$
$[a_1, b_1] = \left[1, \frac{3}{2} = 1{,}5\right]$	$c_1 = \frac{5}{4}$	$f(c_1) > 0$	$b_1 - a_1 = \frac{1}{2}$
$[a_2, b_2] = \left[1, \frac{5}{4} = 1{,}025\right]$	$c_2 = \frac{9}{8}$	$f(c_2) < 0$	$b_2 - a_2 = \frac{1}{4}$
$[a_3, b_3] = \left[\frac{9}{8} = 1{,}0125, \frac{5}{4} = 1{,}025\right]$	$c_3 = \frac{19}{16}$	$f(c_3) > 0$	$b_3 - a_3 = \frac{1}{8}$
$[a_4, b_4] = \left[\frac{9}{8} = 1{,}0125, \frac{19}{16} = 1{,}1875\right]$	$c_4 = \frac{37}{32}$	$f(c_4) > 0$	$b_4 - a_5 = \frac{1}{16}$

Nach dem 10. Schritt ist x_0 durch ein Intervall der Länge $\frac{1}{1024} \approx 0{,}00098$ eingegrenzt, also auf ungefähr 3 Dezimalen genau bestimmt. Auch wenn der Computer uns das nicht übel nimmt, ist es doch recht viel Arbeit für ein eher dürftiges Ergebnis.

Weil die Funktion f nicht nur stetig, sondern offenbar auch differenzierbar ist, bietet sich das folgende Verfahren, das auf Isaac Newton (1643–1727) zurückgeht, als effizienter an: Wir beginnen mit einem Anfangswert x_1 in der Nähe der Nullstelle x_0, etwa $x_1 = 2$. Im Punkt $(x_1,\ f(x_1)) \approx (2,\ 4{,}3891)$ ersetzen wir den Graphen durch seine Tangente mit der Gleichung $y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1)$ und hoffen darauf, dass ihre Nullstelle $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$ näher bei x_0 liegt, als der Anfangswert x_1. Wenn diese Hoffnung nicht trügt, können wir dieses Verfahren fortsetzen, und unserem Computer den Auftrag geben, der Reihe nach die Werte $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ $(k = 1, 2, \cdots)$ zu berechnen.

Dass diese Hoffnung berechtigt ist, ergibt sich aus folgenden Überlegungen: wir setzen voraus, dass sowohl die erste als auch die zweite Ableitung der Funktion f existieren und stetig sind, und dass $f'(x_0) \neq 0$. Dann ist für zwei Konstanten m und M in einem genügend kleinen offenen Intervall I_0 um x_0 sowohl $|f'(x)| > m > 0$ als auch $|f''(x)| < M$. Außerdem nehmen wir an, dass wir mit einem Näherungspunkt x_k erreicht haben, dass $|x_k - x_0| \cdot \frac{2M}{m} < 1$. Das offene Intervall mit den Endpunkten x_k und x_0 $(k > 0)$ bezeichnen wir mit I_k.

Der *Mittelwertsatz der Differentialrechnung* sagt, dass die Steigung $\frac{f(x_0) - f(x_k)}{x_0 - x_k}$ der Sekante zwischen zwei Kurvenpunkten $(x_0,\ f(x_0))$, $(x_k,\ f(x_k))$ gleich der Steigung $f'(x'_k)$ einer (zu ihr parallelen) Tangente in einem Punkt $\left(x'_k,\ f(x'_k)\right)$ ist, wobei x'_k zwischen x_0 und x_k liegt. Anders geschrieben gilt also wegen $f(x_0) = 0$ für geeignete „Zwischenwerte“ x'_k, x''_k und x'''_k

(1) $$f(x_k) = (x_k - x_0) \cdot f'(x'_k) \qquad (x'_k \in I_k)$$

(2) $$f'(x_k) = f'(x_0) + (x_k - x_0) \cdot f''(x''_k) \qquad (x''_k \in I_k)$$

(3) $$f'(x'_k) = f'(x_0) + (x'_k - x_0) \cdot f''(x'''_k) \qquad (x'''_k \in I_k)$$

Listen wir auf, wovon wir noch ausgehen können:

(4) $$|f'(x)| > m > 0 \qquad (x \in I_0)$$

(5) $$|f''(x)| < M \qquad (x \in I_0)$$

(6) $$\left|\frac{x'_k - x_0}{x_k - x_0}\right| \leq 1$$

(7) $$|x_k - x_0| \cdot \frac{2M}{m} < 1$$

$$I_k \subset I_0$$

Aus all dem erhalten wir

$$\begin{aligned}
x_{k+1}-x_0 &= x_k - x_0 - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \\
&= x_k - x_0 - \frac{(x_k-x_0)\cdot f'(x_k')}{f'(x_k)} && \text{wegen (1)} \\
&= (x_k-x_0)\cdot\frac{f'(x_k)-f'(x_k')}{f'(x_k)} \\
&= (x_k-x_0)\cdot\frac{(x_k-x_0)\cdot f''(x_k'')-(x_k'-x_0)\cdot f''(x_k''')}{f'(x_k)} && \text{wegen (2) und (3)} \\
&= (x_k-x_0)^2\cdot\frac{1}{f'(x_k)}\cdot\left(f''(x_k'')-\frac{x_k'-x_0}{x_k-x_0}f''(x_k''')\right) \\
|x_{k+1}-x_0| &\le (x_k-x_0)^2\cdot\frac{2M}{m} < |x_k-x_0| && \text{wegen (4), (5), (6) und (7)}
\end{aligned}$$

Sobald $|x_k - x_0| < 1$ ist, wird nach der letzten Abschätzung wegen des quadratischen Gliedes der Abstand $|x_{k+1}-x_0|$ für wachsendes k rasch klein. Praktischerweise wird man den Näherungsprozess abbrechen, sobald die Differenz $|x_{k+1}-x_k|$ eine geeignete vorgegebene Schranke unterschreitet.

In unserem Beispiel, in dem wir den natürlichen Logarithmus von 3 berechnen ($e^{\log 3} = 3$), liefert das Newtonsche Näherungsverfahren mit den Anfangswerten $x_1 = 2,\ f(x_1) \approx 4{,}3891,\ f'(x_1) \approx 7{,}3891$ und der Formel $x_{k+1} = x_k - 1 + 3\cdot e^{-x_k}$ die folgenden Näherungswerte:

$$\begin{array}{lll}
x_2 \approx 1{,}4060, & f(x_2) \approx 1{,}0796, & f'(x_2) \approx 4{,}0796 \\
x_3 \approx 1{,}1414, & f(x_3) \approx 0{,}1310, & f'(x_3) \approx 3{,}1310 \\
x_4 \approx 1{,}0995, & f(x_4) \approx 0{,}0027, & f'(x_4) \approx 3{,}1310 \\
x_5 \approx 1{,}0986, & f(x_5) \approx 0{,}0000, & f'(x_5) \approx 3{,}0000
\end{array}$$

Damit ist bereits in fünf Schritten die Nullstelle auf 4 Dezimalen genau bestimmt. Wenn als Anfangswert $x_0 = 1$ mit $f(1) \approx -0{,}2817,\ f'(1) \approx 2{,}7183$ gewählt wird, liefert das Newtonsche Näherungsverfahren

$$\begin{array}{lll}
x_2 \approx 1{,}1036, & f(x_2) \approx 0{,}0151, & f'(x_2) \approx 3{,}0151 \\
x_3 \approx 1{,}0986, & f(x_3) \approx 0{,}0000, & f'(x_3) \approx 3{,}0000.
\end{array}$$

Bei der Berechnung der Nullstellen der Funktion $f(x) = x^3 - 3x + 1$ (Figur 2) versagt die Formel von Cardano (sie wurde im Mathe-Brief 34 abgeleitet) für die Wurzeln der Gleichung $x^3 + ax + b = 0$:

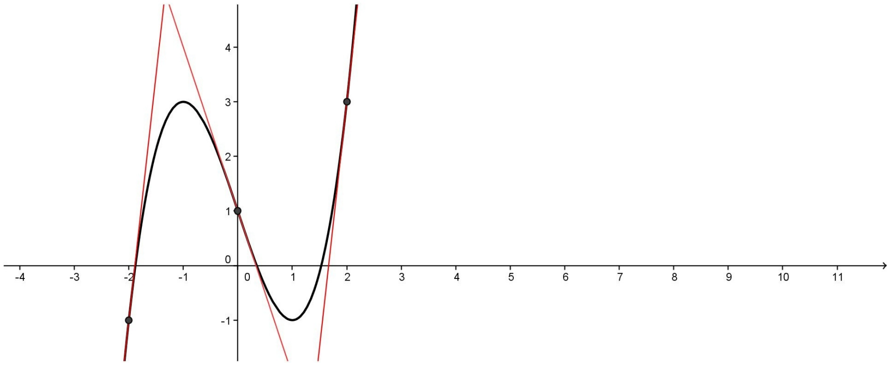
$$x = \sqrt[3]{-\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}}} - \sqrt[3]{\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}}}$$

Weil der Ausdruck unter der Quadratwurzel den Wert $\frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4}$ annimmt, führt sie in komplexe Irrwege. (Im Mathe-Brief 39 wurde darauf näher eingegangen.) Die dem Newtonschen Näherungsverfahren zugrunde liegende Formel liefert für die Funktion $f(x) = x^3 - 3x + 1$ die Näherungswerte

$$\begin{aligned}
x_{k+1} &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \\
&= \frac{2x_k^3 - 1}{3x_k^2 - 3}
\end{aligned}$$

und mit den Anfangswerten

$x_1 = -2$ nach 4 Schritten die Nullstelle $x \approx -1{,}8795$,
$x_1 = 0$ nach 4 Schritten die Nullstelle $x \approx 0{,}3475$,
$x_1 = 2$ nach 5 Schritten die Nullstelle$x \approx 1{,}5321$.



Figur 2

Eine besonders einfache Gestalt nimmt das Newtonsche Näherungsverfahren bei der Berechnung der Quadratwurzel aus einer positiven Zahl a an, in der $f(x) = x^2 - a$:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k - \frac{x_k^2 - a}{2x_k} \\ &= \frac{x_k^2 + a}{2x_k} \\ &= \frac{x_k}{2} + \frac{a}{2x_k} \end{aligned}$$

(Leser des Mathe-Briefes Nr. 33 haben es unter „Babylonisches Wurzelziehen" kennengelernt.) Mit dem Anfangswert $x_1 = 2$ liefert dieses Verfahren

$$\begin{aligned} x_2 &= \tfrac{3}{2} = 1{,}5 \\ x_3 &= \tfrac{17}{12} = 1{,}14\overline{6} \\ x_4 &= \tfrac{577}{408} = 1{,}414215\ldots \\ x_5 &= \tfrac{665857}{470832} = 1{,}4142135623734\ldots \end{aligned}$$

was bereits auf 12 Dezimalen mit dem Wert $\sqrt{2} = 1{,}4142135623730\ldots$ übereinstimmt. Diesen Wert hat der Taschenrechner aber vermutlich auch nur mit etwas mehr Schritten des Newtonschen Näherungsverfahrens berechnet.

LITERATUR

Fast jedes Buch über Einführung in die Analysis, z.B. WINFRIED KABALLO: *Einführung in die Analysis 1.* Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg 1996.

Gilbert Helmberg