Österreichische Mathematische Gesellschaft

MATHE-BRIEF

November 2014 — Nr. 52

Herausgegeben von der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft
http://www.oemg.ac.at/Mathe–Brief ——— mathe–brief@oemg.ac.at

EINE ETWAS ANDERE ZAHLDARSTELLUNG

Die ganze Zahl $g \geq 2$ sei gegeben, und $\lfloor \alpha \rfloor$ beschreibe die nächstkleinere ganze Zahl zu α. Wir betrachten die Abbildung

$$Tx = g \cdot x - \lfloor g \cdot x \rfloor$$

für $0 \leq x < 1$. Schreiben wir $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(x) = \lfloor g \cdot x \rfloor$, so erhalten wir daraus

$$x = \frac{\varepsilon_1}{g} + \frac{Tx}{g}.$$

Wiederholt man dieses Verfahren und setzt $\varepsilon_j = \varepsilon_1(T^{j-1}x)$, so erhält man zunächst die Darstellung

$$x = \frac{\varepsilon_1}{g} + \frac{\varepsilon_2}{g^2} + \cdots + \frac{\varepsilon_n}{g^n} + \frac{T^n x}{g^n}.$$

Da ja $0 \leq \frac{T^n x}{g^n} < \frac{1}{g^n}$, ergibt sich daraus die wohlbekannte Reihe

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_j}{g^j}.$$

Für $g = 10$ ist das die Dezimalbruchentwicklung von x.

So weit, so gut! Mathematische Neugier lässt die Frage entstehen, was passiert, wenn man statt g eine nichtganze Zahl $\beta > 1$ wählt. Man betrachtet die Abbildung

$$Tx = \beta x - \lfloor \beta \cdot x \rfloor.$$

Um konkret zu bleiben, wählen wir für β die Zahl des Goldenen Schnitts, $G = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, also die Zahl $G > 1$, die die Gleichung $G^2 = G + 1$ erfüllt. Für spätere Zwecke merken wir an, dass daher $\frac{1}{G} = G - 1$ gilt. Folgende Fälle sind zu unterscheiden:

$$x \in I(0) := [0, \tfrac{1}{G}[\quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} G \cdot x & < 1 \\ \varepsilon_1(x) & = \lfloor G \cdot x \rfloor = 0 \\ Tx & = G \cdot x \end{cases}$$

$$\text{entweder } Tx \in I(0) \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} G \cdot Tx & < 1 \\ \varepsilon_2(x) = \varepsilon_1(Tx) & = \lfloor G \cdot Tx \rfloor = 0 \end{cases}$$

$$\text{oder } Tx \in I(1) := [\tfrac{1}{G}, 1[\quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} G \cdot Tx & \geq 1 \\ \varepsilon_2(x) = \varepsilon_1(Tx) & = \lfloor G \cdot Tx \rfloor = 1 \end{cases}$$

$$x \in I(1) = [\tfrac{1}{G}, 1[\quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} G \cdot x & \geq 1 \\ \varepsilon_1(x) & = \lfloor G \cdot x \rfloor = 1 \end{cases}$$

$$Tx = G \cdot x - 1 \in I(0) \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} G \cdot Tx & < 1 \\ \varepsilon_2(x) = \varepsilon_1(Tx) & = \lfloor G \cdot Tx \rfloor = 0 \end{cases}$$

Dies hat zur Folge, dass auf $\varepsilon_1(x) = 0$ die Ziffern $\varepsilon_2 = 0$ und $\varepsilon_2 = 1$ folgen können, aber auf $\varepsilon_1(x) = 1$ kann nur $\varepsilon_2 = 0$ folgen. Die Ziffernfolge 11 ist *verboten*!

Das Intervall „n-ter Ordnung“ $I(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)$ sei gegeben durch

$$I(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)=\{x:\varepsilon_1(x)=\varepsilon_1,\ \ldots,\ \varepsilon_n(x)=\varepsilon_n\}.$$

Die Vereinigung aller solchen Intervalle ist das Einheits-Intervall I. Ist etwa $g=2$, so gibt es genau 2^n Intervalle dieser Art, und es gilt $T^nI(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)=[0,1[$. Für $\beta=G$ ist dies anders. Ein Intervall n-ter Ordnung heißt „voll“, wenn $T^nI(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)=I$ (das ist der Fall, wenn $\varepsilon_n=0$) und „nicht voll“, wenn $T^nI(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)=[0,G-1[$ gilt (im letzten Fall ist $\varepsilon_n=1$). So ist etwa

$$\begin{array}{ll} I(0,0)=[0,\frac{1}{G^2}[& \text{(voll)}\\ I(0,1)=[\frac{1}{G^2},\frac{1}{G}[& \text{(nicht voll)}\\ I(1,0)=[\frac{1}{G},1[& \text{(voll)}\end{array}$$

(der geneigte Leser ist eingeladen, die fünf Intervalle dritter Ordnung zu bestimmen).

Weil jede Anwendung von T auf das Intervall $I(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)$ das Ausgangsintervall bijektiv in ein Intervall der mit G multiplizierten Länge abbildet, ist die Länge eines vollen Intervalls $\frac{1}{G^n}$ und eines nicht vollen Intervalls $\frac{G-1}{G^n}$. Aber wieviele volle Intervalle gibt es? Da kommen nun die Fibonaccizahlen ins Spiel, also die Folge (F_n), $n=1,2,3,\ldots$, definiert durch $1,1,2,3,5,\ldots$ mit der Rekursionsformel $F_{n+1}=F_n+F_{n-1}$ (wir setzen $F_0=0$). Es ist praktisch und (wenn man an die Gleichung $G^2=G+1$ denkt) mit Induktion leicht zu beweisen, dass die Formel

$$G^n=F_nG+F_{n-1}$$

gilt.

Man überlegt nun, dass es genau F_{n+1} volle Intervalle $I(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)$ gibt und F_n nicht volle Intervalle: Es gilt nämlich $I(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n=0)=I(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n,0)\cup I(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n,1)$ und $I(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n=1)=I(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n,0)$. Wenn A_n die Anzahl der vollen Intervalle und B_n die Anzahl der nicht vollen Intervalle $I(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)$ ist, gilt also

$$\begin{array}{rcll} A_{n+1} & = & A_n+B_n & \\ B_{n+1} & = & A_n, & \quad\text{also}\\ A_{n+1} & = & A_n+A_{n-1}. & \end{array}$$

Wegen $A_1=1=F_2$ und $A_2=2=F_3$ ergibt sich $A_3=F_4$ und allgemein $A_n=F_{n+1}$, $B_n=F_n$. Da die Summe aller Intervalllängen 1 ergeben muss, ergibt sich ausserdem

$$F_{n+1}\frac{1}{G^n}+F_n\frac{G-1}{G^n}=1.$$

Man kann auch fragen, wie sehen periodische Entwicklungen zu dieser Basis aus? Die ersten interessanten Fälle ergeben sich für die Periodenlänge $N=3$. Es handelt sich um folgende Ziffernfolgen.

- 001: $x=\frac{1}{G^3}+\frac{x}{G^3}$, also $x=\frac{1}{G^3-1}=\frac{G-1}{2}$.
- 010: $x=\frac{1}{G^2}+\frac{x}{G^3}$, also $x=\frac{G}{G^3-1}=\frac{1}{2}$.
- 100: $x=\frac{1}{G}+\frac{x}{G^3}$, also $x=\frac{G^2}{G^3-1}=\frac{G}{2}$.

Wir listen noch die periodischen Entwicklungen für $N=4$ auf. Dabei verwenden wir zur Vereinfachung der Brüche die Gleichungen

$$G^4-1=(G^2)^2-1=(G+1)^2-1=G^2+2G+1-1=3G+1,$$
$$(3G-4)(G^4-1)=(3G-4)(3G+1)=9G^2-12G+3G-4=9G+9-9G-4=5.$$

- 0001: $x = \frac{1}{G^4} + \frac{x}{G^4}$, also $x = \frac{1}{G^4-1} = \frac{3G-4}{5}$.
- 0010: $x = \frac{1}{G^3} + \frac{x}{G^4}$, also $x = \frac{G}{G^4-1} = \frac{3-G}{5}$.
- 0100: $x = \frac{1}{G^2} + \frac{x}{G^4}$, also $x = \frac{G^2}{G^4-1} = \frac{2G-1}{5}$.
- 1000: $x = \frac{1}{G} + \frac{x}{G^3}$, also $x = \frac{G^3}{G^4-1} = \frac{G+2}{5}$.

Man kann sich fragen, warum etwa der Fall des Blockes 1010, welcher der Entwicklung $x = \frac{1}{G} + \frac{1}{G^3} + \frac{x}{G^4}$ entspricht, nicht aufscheint. Es wäre dann $x = \frac{G^3+G}{G^4-1} = 1$. Im Falle $g = 10$ entspricht dies der Reihe $1 = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{9}{10^j}$, die die gelegentliche Mehrdeutigkeit der Dezimalzahldarstellung wiedergibt, welche aber bei der Verwendung der Abbildung T nicht auftreten kann.

F. Schweiger