Österreichische Mathematische Gesellschaft

# MATHE-BRIEF

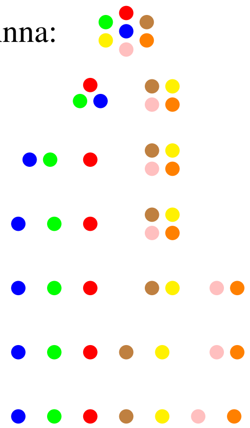
**Oktober 2014 — Nr. 51**

Herausgegeben von der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft
http://www.oemg.ac.at/Mathe–Brief ——— mathe–brief@oemg.ac.at

## EIN WEITERES SMARTIES–SPIEL[1]

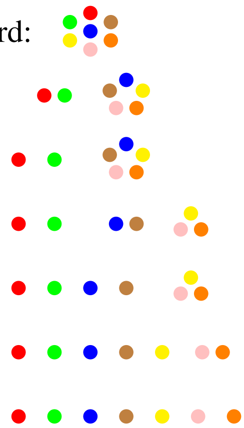
Wieder einmal ist ein Regentag, und Opa hat für Anna, Bernhard, Christoph und Dora Smarties vorbereitet. Diesmal erklärt er ihnen folgendes Spiel: *„Ihr bekommt jeweils einen Haufen von 7 Smarties, ein Blatt Papier und einen Bleistift. Ihr sollt die Smarties schrittweise in kleinere Haufen aufteilen, wobei immer ein Haufen in zwei Teile geteilt wird. Das Ganze macht ihr so lange, bis ihr nur mehr einzelne Smarties habt. Jedes Mal, wenn ein Haufen in zwei Teile geteilt wird, notiert ihr dabei das Produkt der Anzahlen von Smarties in den neu gebildeten Haufen. Am Schluss addiert ihr alle notierten Zahlen. Gewonnen hat, wer die höchste Summe erreicht.“* Sogleich machen sich die vier ans Werk:

Anna:



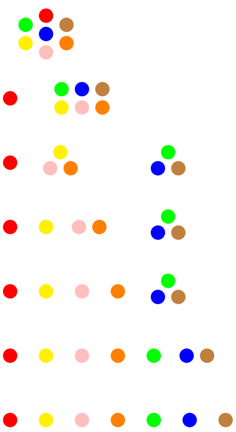
$3 \cdot 4 = 12$
$2 \cdot 1 = 2$
$1 \cdot 1 = 1$
$2 \cdot 2 = 4$
$1 \cdot 1 = 1$
$1 \cdot 1 = 1$

Bernhard:



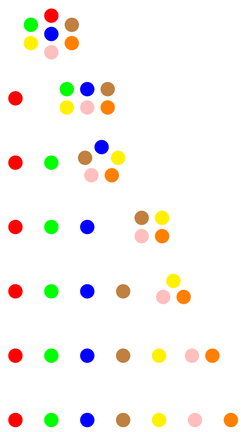
$2 \cdot 5 = 10$
$1 \cdot 1 = 1$
$2 \cdot 3 = 6$
$1 \cdot 1 = 1$
$1 \cdot 2 = 2$
$1 \cdot 1 = 1$

Christoph:



$1 \cdot 6 = 6$
$3 \cdot 3 = 9$
$1 \cdot 2 = 2$
$1 \cdot 1 = 1$
$1 \cdot 2 = 2$
$1 \cdot 1 = 1$

Dora:



$1 \cdot 6 = 6$
$1 \cdot 5 = 5$
$1 \cdot 4 = 4$
$1 \cdot 3 = 3$
$1 \cdot 2 = 2$
$1 \cdot 1 = 1$

So eine Überraschung: alle vier erhalten bei der Addition der notierten Zahlen den Wert 21, auch nachdem sie noch einige weitere Varianten ausprobiert haben.[2] Bald probieren sie das Spiel auch mit anderen Anzahlen von Smarties aus. Und die schlaue Dora kann berichten: *„Mit meiner Methode*

[1] siehe Mathe–Brief 29 für das erste Smarties–Spiel

[2] Die geschätzten Leserinnen und Leser sollten an dieser Stelle einen Moment innehalten und versuchen, eine Erklärung für diese Beobachtung zu finden.

*kann ich genau sagen, welcher Wert sich bei n Smarties ergibt, falls es wirklich für jede Aufteilungsmethode derselbe ist: Denn wenn ich immer ein einzelnes Smartie vom großen Haufen wegnehme, so notiere ich der Reihe nach die Zahlen* $n-1$, $n-2$, *..., 1 und für deren Summe kenne ich eine Fomel:*

$$1+2+\ldots+(n-1)=\frac{(n-1)n}{2}.$$

In der Tat ist es nun ganz leicht, mittels *vollständiger Induktion* zu beweisen, dass die berechnete Summe bei $n$ Steinen wirklich immer genau den Wert $\frac{1}{2}n(n-1)$ ergibt:

Denn für $n=1$ werden gar keine Zahlen notiert und somit ist die Summe 0 (und auch noch in den Fällen $n=2$ und $n=3$ hat man bei der Aufteilung noch keine Wahlmöglichkeiten, sodass wegen Doras Argument schon alles klar ist).

Wenn nun schon bekannt ist, dass bei allen Haufen der Größe $k \leq n-1$ (unabhängig von der Aufteilung) immer die Summe $\frac{1}{2}k(k-1)$ herauskommt, so sehen wir das auch leicht für einen Haufen der Größe $n$. Denn im ersten Schritt wird dieser in zwei Haufen der Größe $a$ bzw. $b$ aufgeteilt, wobei $a+b=n$. Dabei wird die Zahl $a \cdot b$ notiert. Im weiteren betrifft jede Zerlegung immer einen dieser beiden Haufen. Nachdem wir annehmen, dass die Aussage für alle Haufen der Größe kleiner als $n$ bereits gezeigt ist, ist die Summe der im weiteren Verlauf des Spieles notierten Zahlen

$$\frac{a(a-1)}{2}+\frac{b(b-1)}{2}.$$

Insgesamt ist also die Summe aller notierten Zahlen

$$ab+\frac{a(a-1)}{2}+\frac{b(b-1)}{2}=\frac{a^2+2ab+b^2-a-b}{2}=\frac{(a+b)^2-(a+b)}{2}=\frac{n^2-n}{2}=\frac{n(n-1)}{2},$$

was zu beweisen war.

Opa hat aber noch eine einfachere Erklärung für das beobachtete Phänomen, die ganz ohne Induktion auskommt: *„Stellt euch vor, dass im Anfangshaufen je zwei verschiedene Smarties mit einer unsichtbaren Schnur verbunden sind. Wieviel Verbindungsschnüre sind das dann?“* Anna weiss es: *„Jedes der n Smarties ist mit* $n-1$ *anderen verbunden, also sind es* $n \cdot (n-1)$ *Schnüre!“* Opa lächelt am Stockzahn: *„Dabei hast Du aber jede Schnur doppelt gerechnet, nämlich zum Beispiel die Schnur vom roten zum blauen und auch die vom blauen zum roten Smartie!“* Jetzt weiss Bernhard es: *„Es sind also halb so viele, nämlich insgesamt* $\frac{1}{2}n(n-1)$ *Schnüre!“* *„Und jetzt machen wir aus dem einen Haufen Smarties zwei“* sagt Opa, *„und schneiden alle Verbindungsschnüre zwischen Smarties in verschiedenen Haufen durch; wenn im ersten Haufen a Smarties liegen, und im zweiten b Smarties, wieviel Verbindungsschnüre haben wir dann durchgetrennt?“* Dora denkt kurz nach und meint dann: *„Das müßten* $a \cdot b$ *zerschnittene Schnüre sein, weil jedes Smartie vom ersten Haufen mit jedem Smartie vom zweiten Haufen verbunden war.“* *„Richtig,“* sagt Opa, *„und jedes Mal, wenn wir einen Haufen in zwei kleinere zerlegen, ist das wieder so, bis alle Haufen nur mehr aus je einem Smartie bestehen und deshalb alle Schnüre zerschnitten sind. Wieviele Schnüre haben wir denn dann insgesamt durchschnitten? “* *„Alle* $\frac{1}{2}n(n-1)$*“* platzen alle heraus. *„Na also,“* sagt Opa, *„dann kann ja jeder jetzt sein Häufchen einzelne Smarties verwenden, wie er will.“*

Gerhard Kirchner

LITERATUR

David Patrick: *Intermediate Counting & Probability*, AoPS Inc., Alpine (CA), 2007, pp. 167f.