Österreichische Mathematische Gesellschaft

MATHE-BRIEF

April 2014 — Nr. 46

Herausgegeben von der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft
http: // www.oemg.ac.at / Mathe–Brief ——— mathe–brief@oemg.ac.at

Liebe Kolleginnen und Kollegen,

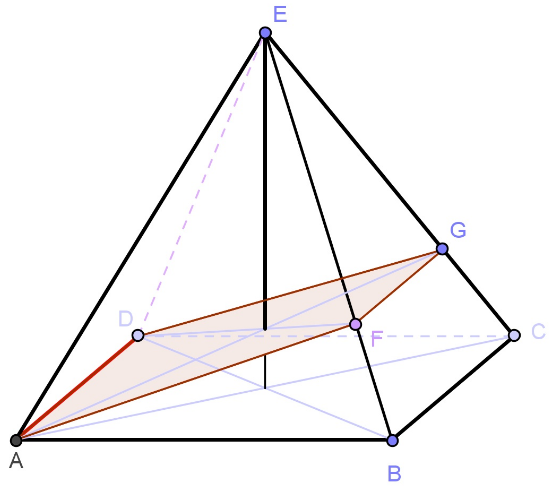
die beiliegende Aufgabe hat uns Dr. Robert Resel als Thema für eine vorwissenschaftliche Arbeit zu Verfügung gestellt. Wir bedanken uns für diesen Beitrag.

Leider hat sich im Februar-Mathe-Brief Nr. 45 ein sinnstörender Fehler eingeschlichen: die Zielgruppe sollten nicht Schülerinnen und Schüler ab der 12., sondern ab der **10.** *Schulstufe sein. Wir bitten um Entschuldigung!*

Die Redaktion

Aufgabe. Eine gerade rechteckige Pyramide $ABCDE$ soll durch eine Ebene $AFGD$ in zwei volumsgleiche Teile partitioniert werden. Zeige, dass F bzw. G die Kante BE bzw. CE im Verhältnis des goldenen Schnittes teilen.

Führe die bei den einzelnen Lösungsschritten verwendeten Begriffe der linearen Algebra und ihre relevanten Eigenschaften an, und liefere Beweise für gegebenenfalls benützte Sätze.



Möglicher Lösungsweg.

(1) Definition des Goldenen Schnittes:

$$\overline{BF} : \overline{FE} = \overline{FE} : \overline{BE}.$$

(2) Wahl geeigneter Koordinaten für die Punkte A,B,C,D,E, zum Beispiel

$$A = (0,0,0),\ B = (2a,0,0),\ C = (2a,2b,0),\ D = (0,2b,0),\ E = (a,b,h)$$

oder

$$A = (-a,-b,0),\ B = (a,-b,0),\ C = (a,b,0),\ D = (-a,b,0),\ E = (0,0,h).$$

(3) Festlegung der Schnitt-Ebene $AFGD$ durch einen geeigneten Parameter $t = \overline{BF} : \overline{BE}$.

(4) Berechnung der Koordinaten von F und G als Funktion von t (Parameterdarstellung einer Geraden aus Stütz-Vektor und Richtungsvektor).

(5) Berechnung der Fläche $AFGD$ als Summe der Flächen der zwei Dreiecke AFD und DFG (Definition und relevante Eigenschaften des Vektor-Produktes, Zusammenhang mit der Fläche des von den beiden Vektoren aufgespannten Dreiecks).

(6) Aufstellung der Gleichung der Ebene $AFGD$ in Abhängigkeit von t (Gleichung der Normalebene eines Vektors durch einen Stützvektor; hier bietet die erste Koordinatenwahl einen Vorteil).

(7) Berechnung des Abstandes des Punktes E von der Ebene $AFGD$ (Verwendung der Hesseschen Normalform).

(8) Berechnung des Volumens der Pyramide $AFGDE$ (Formel für das Volumen einer Pyramide).

(9) Berechnung des Parameters t aus der Forderung

$$\text{Volumen}(AFGDE) = \frac{1}{2}\,\text{Volumen}(ABCDE)$$

(Lösung einer quadratischen Gleichung und zweckmäßige Wahl der Lösung).

(10) Nachweis der Gleichung

$$t : (1-t) = (1-t) : 1.$$

Mögliche Erweiterungen. Weitere Lösungsvarianten; der Goldenen Schnitt in Natur, Kunst, Architektur und Mathematik.

Mögliche Literatur.

- GÖTZ, REICHEL, MÜLLER, HANISCH: Mathematik Lehrbuch 5–8. öbv& hpt, Wien 2007.
- BEUTELSBACHER, ALBRECHT: Der Goldene Schnitt. Spektrum Akademischer Verlag 1995.
- WIKIPEDIA: Goldener Schnitt.