Österreichische
Mathematische
Gesellschaft

MATHE-BRIEF

Februar 2014 — Nr. 44

Herausgegeben von der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft
http: // www.oemg.ac.at / Mathe–Brief ——— mathe–brief@oemg.ac.at

Proportionen – ein Werkzeug zum qualitativen Verständnis vieler mathematischer Fragen

Zwei Größen seien in Beziehung zueinander. Oft stellt sich die Frage: Was passiert mit der zweiten Größe, wenn man die erste verdoppelt, verdreifacht oder allgemeiner ver-k-facht. In einfachen Spezialfällen spricht man von direkter oder indirekter Proportionalität, direkt oder indirekt quadratischer Proportionalität, usw.

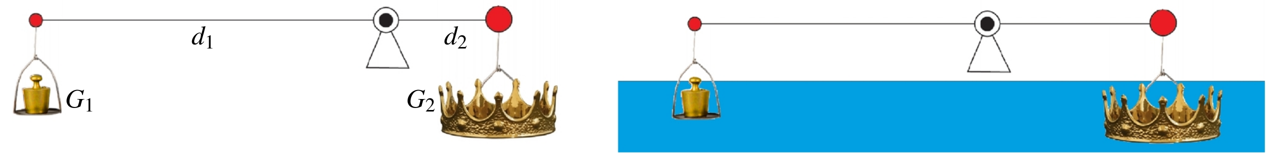

Fig. 1: Der Gold-Test des Archimedes: $G_1 : G_2 = d_2 : d_1$

Ein typisches Beispiel für indirekte Proportionalität ist die Balkenwaage. Fig. 1 illustriert, wie Archimedes durch Anwendung zweier seiner Erfindungen (Hebelgesetz und Auftrieb) in Sekundenschnelle feststellen konnte, ob die Dichte der Krone geringer als die Dichte von reinem Gold war (das Testgewicht muss aus reinem Gold sein): Wenn der Lagerpunkt nach dem Eintauchen in Wasser in Richtung Testgewicht zu verschieben ist, beinhaltet die Krone leichtere Materialien.

Die folgenden beiden Beispiel-Gruppen sollen zeigen, wie relativ einfach man auch vermeintlich komplizierte Berechnungen argumentieren und damit den Mathematikunterricht fächerübergreifend und spannend gestalten kann. Der Lerneffekt ist dabei vielleicht sogar größer als beim Herumrechnen mit Formeln. Indem man gelegentlich durch großzügiges Runden zu „schönen Zahlen“ übergeht, kann man auch das oft vernachlässigte Kopfrechnen trainieren (z.B. $\sqrt[3]{25} \approx \sqrt[3]{27} = 3$).

(a) Ein Paradoxon mit großen Auswirkungen

Leicht einzusehen, wenn auch nicht trivial, gelten folgende beiden Sätze:

(1) *Skaliert man einen beliebigen Körper mit dem Faktor k, dann nimmt seine Oberfläche – aber auch jeder beliebige Querschnitt– mit dem Faktor k^2 zu.* Zum Beweis nähert man Oberfläche oder Querschnitte des Körpers mit beliebiger Genauigkeit durch winzige Dreiecke an (Triangulierung). Für jedes einzelne Dreieck gilt der Satz, daher auch für die Summe aller Flächeninhalte.

(2) *Skaliert man einen beliebigen Körper mit dem Faktor k, dann nimmt sein Volumen mit dem Faktor k^3 zu.* Zum Beweis nähert man den Körper mit beliebiger Genauigkeit durch winzige Würfel an (Voxelierung). Für jeden einzelnen Würfel gilt der Satz, daher auch für die Summe aller Volumina.

Rechenbeispiel: Als die alten Ägypter beim Bau ihrer großen Pyramiden die halbe Bauhöhe erreichten, war bereits $1-(1/2)^3 = 7/8$ des Materials „verbaut“. Die heute nicht mehr vorhandene glatte Oberfläche aus Kalkstein machte in der unteren Hälfte $1-(1/2)^2 = 3/4$ aus.

Aus (1) und (2) folgt dann bereits ein Satz, den man als *Oberflächen-Volumina-Paradoxon* bezeichnen könnte:

(3) *Skaliert man einen beliebigen Körper mit dem Faktor k, verändert sich das Verhältnis von Oberfläche bzw. Querschnitt zum Volumen mit dem Faktor* $1/k$. Das Verhältnis ist also von der absoluten Größe abhängig, was für einen geometrisch-mathematisch denkenden Menschen zunächst gewöhnungsbedürftig ist.

Das Paradoxon (3) hat in der Natur weitreichende Konsequenzen. Hier nur wenige Beispiele (dutzende andere sind z.B. in [1] zu finden, biologische „Anwendungen"sind auch in [2] gut erklärt):

Klassische Beispiele mit „wirklich ähnlichen" Objekten:

• Kleinere Eier sind schneller „kernweich zu kochen" als große, weil sie im Verhältnis eine größere Oberfläche haben. In der Natur: Ein Straußenei hat etwa die 25-fache Masse eines Hühnereis. Der Ähnlichkeitsfaktor ist daher $k = \sqrt[3]{25} \approx 3$, und ein Hühnerei hat im Verhältnis zum Volumen die dreifache Oberfläche.
Im Weltall: Kleine Planeten kühlen schneller ab als große. Unser Mond hat, weil er nur $1/4$ des Erddurchmessers hat, im Verhältnis zum Volumen die vierfache Oberfläche wie die Erde und ist deshalb (obwohl sogar etwas jünger) schon ausgekühlt.

• Große Luftblasen steigen schneller auf als kleine. Vergrößert man nämlich eine Luftblase mit dem Faktor k, so nimmt das Volumen und damit der Auftrieb mit dem Faktor k^3 zu, der für den Wasserwiderstand verantwortliche Querschnitt aber nur mit dem Faktor k^2.

• Ein Wassertröpfchen mit $1{,}3$ mm Durchmesser hat, verglichen mit der Erdkugel (ca. 13 000 km Durchmesser), eine 10^{10}-Mal so große Oberfläche im Verhältnis zum Volumen. Dementsprechend wird es – im Gegensatz zur Erde – von der Oberflächenspannung zur Kugel geformt.

Qualitative Aussagen mit nur „teilweise ähnlichen" Objekten (die Schlussfolgerungen gelten also nur für starke Größenunterschiede $k >> 1$*):*

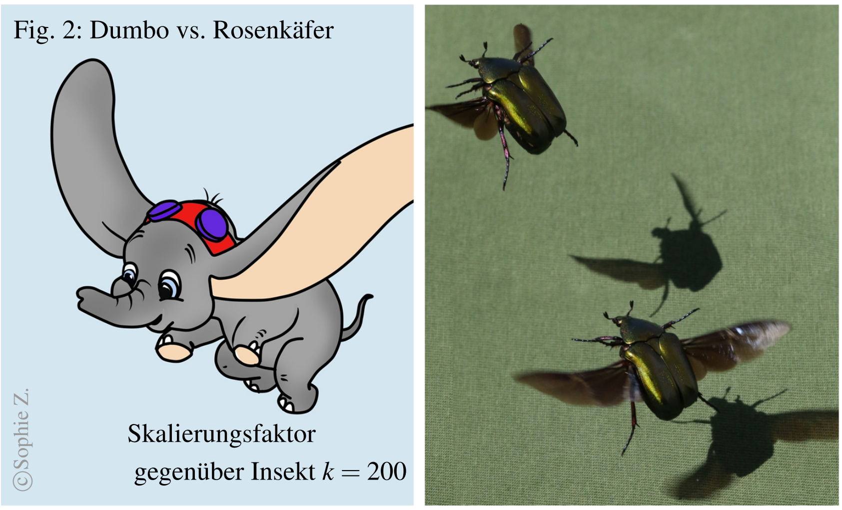

Fig. 2: Dumbo vs. Rosenkäfer

Fig. 3: Robbe vs. weißer Hai

• Große Tiere haben im Verhältnis eine kleinere Oberfläche und leiden in heißen Gegenden oft an Überhitzung: Die „Eigenwärme" kann nur schwer abgegeben werden und summiert sich bei zusätzlicher Hitzeeinwirkung so sehr, dass bald eine kritische Körpertemperatur erreicht wird, bei der das Eiweiß im Gehirn gefährdet ist. In kalter Umgebung hingegen frieren große Tiere weniger.

Im Gegensatz dazu haben kleine warmblütige Tiere fast immer Probleme mit der Kälte, und eben deshalb gibt es eine Untergrenze der Körpergröße von Säugetieren und Vögeln (Spitzmaus, Kolibri).

Konkrete Rechenaufgabe: Vergrößert man einen Delfin mit dem Faktor 10, so erhält man recht genau einen großen Wal. Letzterer hat im Verhältnis zu seiner Blutmenge nur noch 1/10 der Oberfläche, kann daher problemlos in den kalten und daher sauerstoffreichen arktischen und antarktischen Gewässern seinen enormen Krill-Bedarf stillen. Zum Gebären der kleinen und dadurch kälteempfindlichen Jungtiere schwimmen die Wale tausende Kilometer in wärmere Gewässer, ohne dort auch nur irgendetwas fressen zu können.

• Der weiße Hai (Fig. 3 unten) kann – obwohl „prinzipiell kaltblütig“ – seine Körpertemperatur wegen des günstigen Verhältnisses Oberfläche zu Volumen und der ständig entstehenden Bewegungsenergie ohne großen Aufwand um bis zu zehn Grad über der Wassertemperatur halten und ist daher agil genug, um auch im kalten Wasser Robben zu jagen. Letztere brauchen enorme Futtermengen, um ihre Körpertemperatur aufrecht zu erhalten.

• Wegen ihrer Ausmaße haben große Wale bzw. Haie einen verhältnismäßig viel geringeren Wasserwiderstand (Querschnitt) bzw. Reibungswiderstand (Kontaktfläche zum Wasser) als kleine.

• Afrikanische Elefanten (Fig. 2 links) haben – im Gegensatz zu praktisch allen kleineren Säugetieren – kein Fell und zusätzlich große Ohren, um die Kühlung des Körpers gewährleisten zu können. Mammuts hatten kleine Ohren und ein Fell und konnten daher sogar in der Eiszeit gut überleben.

• Elefanten haben dicke Beine, weil die Muskelkraft von der Querschnittsfläche (und nicht von der absoluten Größe) des Muskels abhängt, und bei simpler Vergrößerung das Verhältnis Querschnitt zu Volumen (= Gewicht) immer ungünstiger wird. Der Rosenkäfer in Fig. 2 rechts ist „so pyknisch wie Dumbo“, aber um den Faktor $k = 200$ kleiner. Daher genügt ihm ein proportional wesentlich kleinerer Muskelquerschnitt, um im Verhältnis sogar stärker als der Elefant zu sein.

• Fast alle insektengroßen Tiere können – im Gegensatz zu größeren Tieren – fliegen. Die Oberfläche der Flügel ist im Verhältnis zum Gewicht so groß, dass sich die Tiere fast wie in einem Ölbad an der Luft abstoßen können (siehe z.B. Fig. 2 rechts). Winzige Spinnentiere können sogar ohne Flügel von Winden über hunderte Kilometer transportiert werden.

(b) Satelliten-Umlaufzeiten

Ein Satellit bleibt stabil auf einer nahezu kreisförmigen Bahn, wenn sein Gewicht und die zugehörige Zentripetalkraft gleich groß sind: $a \cdot m = m.v^2/r \Longrightarrow v = \sqrt{a \cdot r}$ mit a als Erdbeschleunigung im Abstand r vom Erdmittelpunkt (weil beide Größen in gleicher Weise von seiner Masse abhängen, spielt diese keine Rolle).

Wir vergleichen nun zwei stabile Satellitenbahnen, deren Abstände vom Erdmittelpunkt sich wie $1 : k$ verhalten. Die Erdbeschleunigungen verhalten sich dann wie $1 : k^2$ und die Geschwindigkeiten wie $\sqrt{a \cdot r} : \sqrt{(a/k^2) \cdot (k \cdot r)} = \sqrt{k} : 1$ (d.h., die Bahngeschwindigkeit eines Satelliten nimmt mit zunehmendem Abstand vergleichsweise langsam ab). Weil der zweite Satellit zudem den k-fachen Umfang zurücklegen muss, verhalten sich die Umlaufzeiten wie $1 : k^{3/2}$, was sich mit dem dritten Keplerschen Gesetz („Die Quadrate der Umlaufzeiten verhalten sich wie die Kuben der großen Bahnhalbachsen“) deckt.

Wir kennen nun von einem Satelliten Daten: Der Mond hat eine siderische Umlaufzeit von 27,32 Tagen, und sein durchschnittlicher Abstand vom Erdmittelpunkt beträgt 384 000 km. Daraus kann man auf alle anderen Satellitenbahnen schließen:

• *Geostationäre Satelliten* müssen die Erde über dem Äquator in 23 h 56 min (so lange dauert ein siderischer Tag) umkreisen. Derzeit drängeln sich etwa 300 solche Satelliten (Wettersatelliten, TV-Satelliten) auf einer kreisförmigen Bahn. Die Umlaufzeiten, bezogen auf die Mondbahn, verhalten sich gerundet wie 1 : 27, und die Radien daher (mit der „schönen Zahl“ 27 im Kopf gerechnet) wie $1 : k = 1 : (\sqrt[3]{27})^2 = 1 : 9$. Der Abstand eines geostationäre Satelliten vom Erdmittelpunkt ist daher etwa 42 500 km, und die elektrischen Signale brauchen hin und retour immerhin schon mehr als $0{,}2$ Sekunden. Nebenbei: Der Satellit bewegt sich $\sqrt{k} \approx \sqrt{9} = 3$ Mal so schnell wie der Mond.

• *GPS-Satelliten* haben genau einen halben siderischen Tag Umlaufzeit. Im Verhältnis zum geostationären Satelliten gilt für die Umlaufzeiten 1 : 2, für die Radien daher $1 : \sqrt[3]{2}^2$. Letztere fliegen somit im Abstand 28 670 km vom Erdmittelpunkt oder in einer Flughöhe von gut 20 000 km und fliegen $\sqrt[3]{2}$ Mal so schnell wie die geostationären Satelliten.

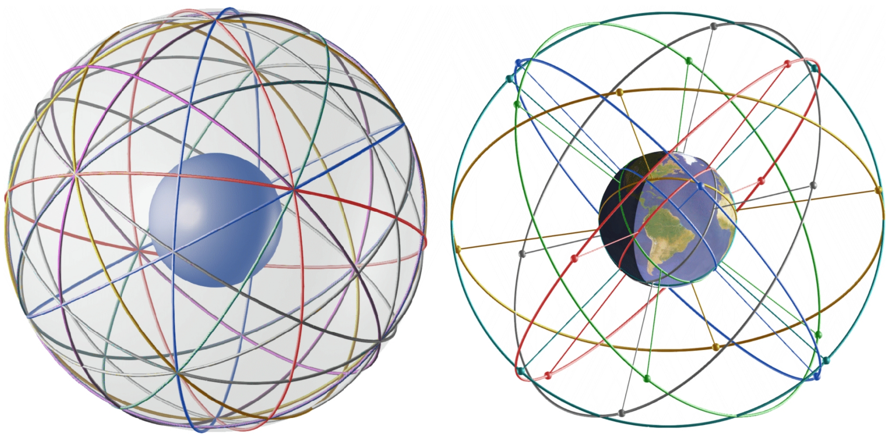

Fig. 4: Verteilung von GPS-Satelliten (links: theoretisch, rechts: praktisch)

Anmerkung zum Problem der Verteilung der (mindestens 24) GPS-Satelliten: Fig.4 links zeigt, wie man theoretisch 30 solcher Satelliten optimal verteilen könnte. Wegen der genau festgelegten Höhe ist es gar nicht so einfach, potentielle Kollisionen zu vermeiden. Mittlerweile fliegen 24 Satelliten in 6 Ebenen, die zum Äquator unter 55° geneigt sind und jeweils durch Rotation um 60° um die Erdachse ineinander übergehen. Die je vier Satelliten jeder Ebene sind exakt gleichverteilt (Fig.4 rechts). Damit sind die nicht-polaren Zonen, in denen mehr als 99% der Menschen leben, etwas bevorzugt.

• Die meisten Satelliten fliegen in *Erdnähe* (Abstand 6700 km vom Erdmittelpunkt). Wir vergleichen wieder mit dem Mond und seinen 656 Stunden Umlaufzeit. Aufgerundet auf eine „schöne Zahl“ ergäbe sich $k \approx 64$, und damit eine Umlaufzeit von $\approx 656/\sqrt{64}^3 \approx 1{,}3$ h. Tatsächlich sind es einige Minuten mehr.

• Vergleichbare Regeln gelten im ganzen *Planetensystem*. Schon die Mayas wussten: Acht Venusjahren entsprechen ziemlich genau fünf Erdenjahre. Daraus folgt: $k^{3/2} \approx 5/8 \Longrightarrow k \approx 0{,}72$, sodass die Venus etwa $3/4$ so weit von der Sonne entfernt ist wie die Erde.

Georg Glaeser

Mögliche Literatur:
[1] G. Glaeser: *Der mathematische Werkzeugkasten. Anwendungen in Natur und Technik*, 4. Auflage. Springer Spektrum, Heidelberg 2014
[2] C. Lavers: *Warum haben Elefanten so große Ohren? Dem genialen Bauplan der Tiere auf der Spur.* Bastei Lübbe, 2003