Österreichische Mathematische Gesellschaft

MATHE-BRIEF

Januar 2014 — Nr. 43

Herausgegeben von der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft
http://www.oemg.ac.at/Mathe–Brief ——— mathe–brief@oemg.ac.at

Mathematik als Spiel – Auf der Suche nach Kurven

Altehrwürdig sind die Definitionen für Ellipse und Hyperbel: Gegeben seien zwei Punkte F_1 und F_2 (*Brennpunkte* genannt). Die Ellipse ist der geometrische Ort (= die Menge) aller Punkte X, so dass die *Summe* $\overline{F_1X}+\overline{F_2X}$ konstant ist. Die *Hyperbel* ist der geometrische Ort der Punkte X, so dass die *Differenz* $\overline{F_1X}-\overline{F_2X}$ konstant ist.

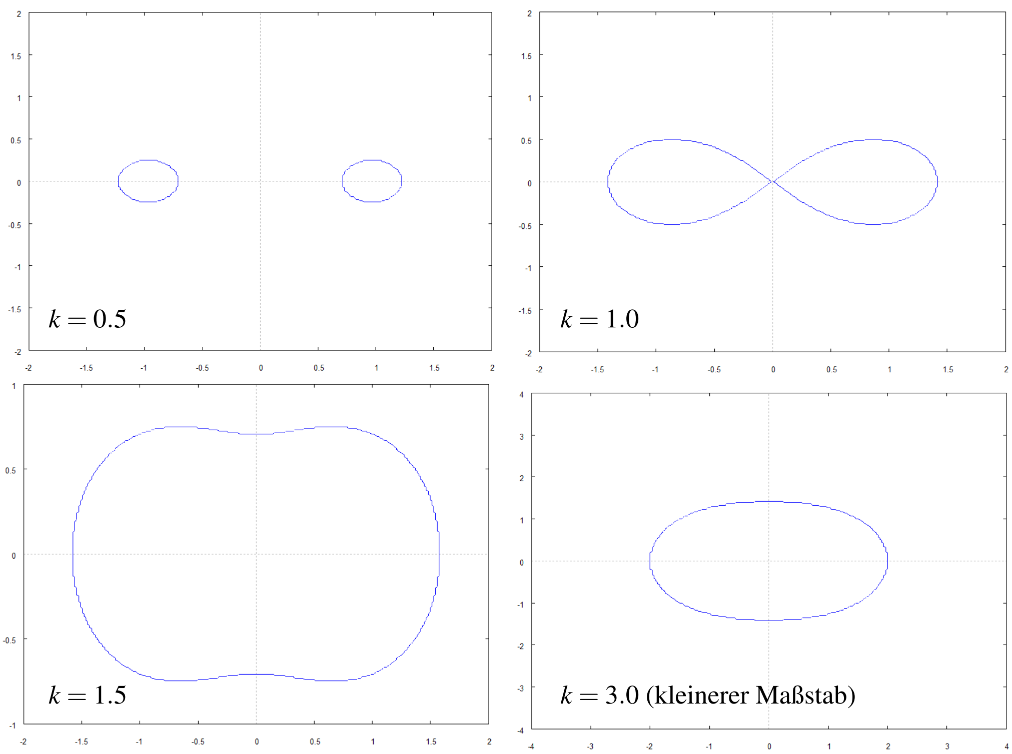
Nun besteht Mathematik auch darin, mit gegebenen Daten spielerisch umzugehen. Wie wäre es, wenn wir statt Summe eben *Produkt* nehmen, also die Kurve mit der Bedingung, $\overline{F_1X}\cdot\overline{F_2X}$ sei konstant, suchen. Wir setzen dazu $F_1=(-1,0)$ und $F_2=(1,0)$ und erhalten

$$\sqrt{(x+1)^2+y^2}\sqrt{(x-1)^2+y^2}=k.$$

Durch Quadrieren und Vereinfachen gelangen wir zu

$$x^4+y^4+2x^2y^2-2x^2+2y^2+1-k^2=0.$$

Ist $k=1$, so erhalten wir eine geschlossene Acht mit Kreuzungspunkt im Nullpunkt $(0,0)$. Sie reicht vom Punkt $(-\sqrt{2},0)$ links bis zum Punkt $(\sqrt{2},0)$ rechts. Die Maxima des oberen Kurventeils $(y>0)$ liegen, wie wir wenig später sehen werden, bei $x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ und $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$.



Ist $k < 1$, so zerfällt die Kurve in zwei Teile und bildet zwei Ovale. Sie kreuzt in den Punkten $(-\sqrt{1+k},0)$, $(-\sqrt{1-k},0)$, $(\sqrt{1-k},0)$ und $(\sqrt{1+k},0)$ die x-Achse. Ist $k > 1$, so ist die Kurve einteilig und es verbleiben die Punkte $(-\sqrt{1+k},0)$ und $(\sqrt{1+k},0)$ als Durchgangspunkte durch die x-Achse.

Wer Differentialrechnung liebt, kann auch noch die Extrema suchen. Dazu genügt es die obere Hälfte, die Funktion $y = y(x) > 0$ zu betrachten. Eine Rechnung ergibt

$$y^2 = -x^2 - 1 + \sqrt{4x^2 + k^2}.$$

(Frage: Warum ist wohl nur die positive Wurzel brauchbar?). Daher ist

$$yy' = -x + \frac{2x}{\sqrt{4x^2 + k^2}}.$$

Die Gleichung $y' = 0$ führt auf

$$x\sqrt{4x^2 + k^2} = 2x.$$

Wenn $k > 1$ ist, ist $x = 0$ eine Extremstelle. Weitere mögliche Extremstellen findet man aus

$$4x^2 + k^2 - 4 = 0.$$

Nur wenn $k < 2$ ist, erhält man zwei weitere Extrema, welche Maxima sind. Die Stelle $x = 0$ ist für $1 < k < 2$ daher ein lokales Minimum. Für $k \geq 2$ verschwindet die Einbuchtung der Kurve und $x = 0$ ist ein Maximum. Bestätigen kann man dies durch eine leichte Rechnung, denn es ist

$$(y')^2 + yy'' = -1 + \frac{2k^2}{(4x^2 + k^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Ist $x = 0$ ein lokales Extremum, so ist das Vorzeichen von $y''(0)$ gegeben durch das Vorzeichen von $-1 + \frac{2}{k}$. Ist $x \neq 0$ ein Extremum, so ist $4x^2 + k^2 = 4$, und das Vorzeichen von $y''(x)$ gleich dem Vorzeichen von $-1 + \frac{k^2}{4}$. Diese Kurven werden *Cassinische Kurven* genannt, und der Fall $k = 1$ heißt *Lemniskate*.

Nun kann man auch nach dem *Quotienten* fragen! Wir suchen die Kurve mit der Bedingung

$$\overline{F_1X} \ : \ \overline{F_2X} = k.$$

Nehmen wir wiederum $F_1 = (-1,0)$ und $F_2 = (1,0)$, so erhalten wir

$$\frac{\sqrt{(x+1)^2 + y^2}}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}} = k.$$

Aus Symmetriegründen können wir $k \geq 1$ annehmen, aber wir sind zunächst enttäuscht, denn unsere Rechnung führt auf

$$(k^2-1)x^2 - 2(k^2+1)x + (k^2-1)y^2 + k^2 - 1 = 0.$$

Für $k = 1$ ist dies die Gerade $x = 0$, die Streckensymmetrale. Ist $k > 1$, so ist dies der Kreis mit der Gleichung

$$\Big(x - \frac{k^2+1}{k^2-1}\Big)^2 + y^2 = \Big(\frac{2k}{k^2-1}\Big)^2.$$

Aber es ist doch eine kleine Überraschung, dass der Kreis mit Mittelpunkt $(\frac{k^2+1}{k^2-1},0)$ und Radius $\frac{2k}{k^2-1}$ die Eigenschaft hat, dass der Quotient von $\overline{F_1X}$ und $\overline{F_2X}$ konstant gleich k ist. Dieser Kreis ist als *Kreis des Apollonius* bekannt.

Fritz Schweiger