Österreichische Mathematische Gesellschaft

MATHE-BRIEF

Oktober 2013 — Nr. 40

Herausgegeben von der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft
http: // www.oemg.ac.at / Mathe–Brief ——— mathe–brief@oemg.ac.at

REGULÄRE UND HALBREGULÄRE POLYEDER

Im Mathebrief Nr. 32 vom Jänner dieses Jahres wurden Parkettierungen der Ebene betrachtet. Dieser Mathebrief ist eine Fortsetzung dazu. Daher rufen wir uns zunächst einige der dort behandelten Gleichungen ins Gedächtnis: Für die *archimedischen Parkette* wurde damals aus der Bedingung, dass in jedem Eckpunkt die Winkelsumme der zusammentreffenden Winkel zusammen 360° ergibt, die Gleichung

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n_1}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n_2}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n_k}\right)=1 \tag{1}$$

hergeleitet. Darin bedeutet k die Anzahl der in einem Eckpunkt zusammentreffenden regelmäßigen Polygone und $n_1, \ldots, n_k$ sind deren Eckenzahlen. Für diese diophantische Gleichung wurden im Mathebrief Nr. 32 die Lösungstupel $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ untersucht und alle für eine Parkettierung in Frage kommenden angegeben. Im Fall $k = 3$ war dabei die folgende Nebenbedingung wesentlich:

$$\text{Wenn } n_1 \text{ ungerade ist, so gilt } n_2 = n_3. \tag{2}$$

Wenn wir nämlich die regelmäßigen Polygone, die in einem Eckpunkt zusammentreffen, mit P_1, P_2 und P_3 bezeichnen, und die Kanten von P_1 der Reihe nach durchnummerieren, hängen an den ungeraden Kanten Kopien von P_2 und an den geraden Kanten Kopien von P_3. Wenn n_1 ungerade ist, stoßen im Anfangspunkt der ersten Kante von P_1 zwei Kopien von P_2 zusammen. Weil jeder Eckpunkt gleichberechtigt ist, müssen P_2 und P_3 kongruent sein. Analoges gilt für n_2, n_3.

Bei einer *platonischen Parkettierung* sollen nur lauter gleiche Polygone verwendet werden, es gilt also $n_1 = n_2 = \ldots = n_k =: n$. Dann ergibt Gleichung (1)

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{n}=\frac{1}{k}. \tag{3}$$

Weiters werden wir im folgenden die *Eulersche Polyederformel* verwenden: Diese besagt, dass in jedem konvexen, beschränkten Polyeder für die Anzahl der Ecken E, die Anzahl der Flächen F und die Anzahl der Kanten K gilt:

$$E+F=K+2.$$

Ein Beispiel liefert der Würfel mit seinen 8 Ecken, 6 Flächen und 12 Kanten.

Nun wenden wir uns der Untersuchung von Polyedern zu: In einem Polyeder ist die Summe der Innenwinkel der Randflächen in jedem Eckpunkt kleiner als 360°. (Ecken können plattgedrückt werden und reißen dann auf.) Als Folge tritt an Stelle der Gleichung (1) die Ungleichung

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n_1}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n_2}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n_k}\right)<1. \tag{4}$$

Bei einem *platonischen Körper* sind alle Seitenflächen regelmäßige n–Ecke und in jeder Ecke stoßen k solche n–Ecke zusammen. Daher gilt hier – analog zu Gleichung (3) – die diophantische Ungleichung

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{n} < \frac{1}{k}, \quad n,k \geq 3.$$

Durch Einsetzen von $n = 3,\ 4,\ 5$ finden wir die Lösungen $(n,k) \in \{(3,3),(3,4),(3,5),(4,3),(5,3)\}$. Für $n \geq 6$ folgt $k < 3$, daher gibt es keine weiteren Lösungen. Nun setzen wir die Bedingungen

$$nF = 2K = kE$$

(jede Fläche hat n Ecken bzw. Kanten, jede Kante gehört zu zwei Flächen, jede Ecke zu k Flächen) in die Eulersche Polyederformel ein:

$$\frac{nF}{k} + F = \frac{nF}{2} + 2$$

Daraus folgt $F = \dfrac{2}{\frac{n}{k} + 1 - \frac{n}{2}}$, sodass sich jeweils F, E und K berechnen lassen. Man erhält die folgenden „platonischen Körper“:

n	k	F	E	K	Name
3	3	4	4	6	Tetraeder
3	4	8	6	12	Oktaeder
3	5	20	12	30	Ikosaeder
4	3	6	8	12	Hexaeder (Würfel)
5	3	12	20	30	Dodekaeder

Weiters untersuchen wir die *archimedischen Körper*, deren Seitenflächen verschiedenartige regelmäßige Polygone sein können, die aber so symmetrisch sind, dass sich jede Ecke des Körpers durch geeignete Drehungen in jede andere überführen lässt, wobei der Körper insgesamt in der selben Position bleibt.
Im Fall $k = 3$ nimmt die Ungleichung (4) die Form

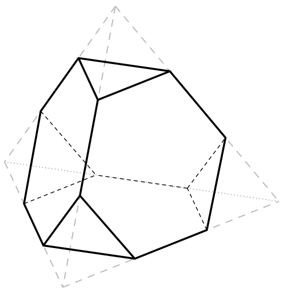
$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} > \frac{1}{2}$$

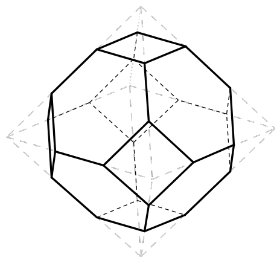
und wieder ist auch die Bedingung (2) zu berücksichtigen. Es zeigt sich, dass für jedes Lösungstripel (n_1, n_2, n_3) genau ein archimedischer Körper existiert (die archimedischen Prismen werden manchmal nicht zu den archimedischen Körpern gezählt):

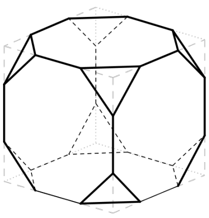
n_1	n_2	n_3	Name nach WIKIPEDIA
3	6	6	Abgestumpftes Tetraeder
3	8	8	Abgestumpftes Hexaeder
3	10	10	Abgestumpftes Dodekaeder
4	4	$n \geq 3$	archimedische Prismen
4	6	6	Abgestumpftes Oktaeder
4	6	8	Großes Rhombenkuboktaeder
4	6	10	Großes Rhombenikosidodekaeder
5	6	6	Abgestumpftes Ikosaeder („Fußball“)

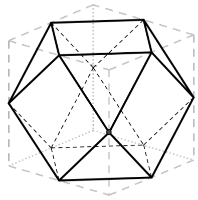
Eine analoge Untersuchung ergibt, dass für $k = 4$ noch fünf Typen und für $k = 5$ noch zwei Typen archimedischer Körper existieren - neugierige Leser können in der unten angegebenen Literatur mehr darüber finden.

Die Bezeichnungen der archimedischen Körper beinhalten auch Rezepte für eine geometrische Konstruktion zumindest eines Teiles derselben. Unmittelbar klar ist das bei den archimedischen Prismen: man nehme ein regelmäßiges Vieleck und errichte darüber ein gerades Prisma mit der Seitenlänge als Höhe. Interessanter ist das 'Abstumpfen' eines platonischen Körpers: Man nehme einen solchen und trage von einem Eckpunkt auf jeder der zugehörigen Kanten dieselbe Strecke auf. Die erhaltenen Punkte liegen in Form eines regelmäßigen Vielecks in einer Ebene, und wenn man die Pyramide über diesem Vieleck entfernt, hat man die Ecke 'abgestumpft'. Nun führt man das für alle Ecken des platonischen Körpers durch und wählt die Strecke, die die Länge der Mantellinien der entfernten Pyramiden bestimmt, so, daß auf den Seitenflächen des ursprünglichen Polyeders wieder regeläßige Vielecke entstehen. Wenn man das beim Tetraeder, Oktaeder und beim Hexaeder (dem Würfel) macht, sieht das so aus:









Im letzten Bild (beim 'Kuboktaeder') wurde als Strecke die halbe Hexaederseite gewählt - die Kanten des ursprünglichen Hexaeders schrumpfen dann auf je ihren Mittelpunkt zusammen. Diesen Trick kann man auch beim Tetraeder und beim Oktaeder probieren - aber vom Resultat bitte nicht enttäuscht sein!

Für weitere Informationen über sowie Bilder dieser Körper siehe [1], Kapitel 11 und [2], Stichwort „Platonischer Körper“ bzw. „Archimedischer Körper“.

Gerhard Kirchner und Gilbert Helmberg

Literatur

[1] H. Reeker, E. Müller (Hrsg.): Mαth$\in$ ist c∞l! Eine Sammlung mathematischer Probleme, Cornelsen Verlag, Berlin, 2001

[2] WIKIPEDIA, *Die freie Enzyklopädie*, `http://de.wikipedia.org`