Österreichische Mathematische Gesellschaft

MATHE-BRIEF

September 2013 — Nr. 39

Herausgegeben von der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft
http: // www.oemg.ac.at / Mathe–Brief ——— mathe–brief@oemg.ac.at

KUBISCHE GLEICHUNGEN — EINE NACHLESE

Im Mathe-Brief Nr. 34 wurde die auf CARDANO und TARTAGLIA zurückgehende Lösung der kubischen Gleichung betrachtet. Dazu wird die kubische Gleichung auf die Form

$$x^3 + px + q = 0 \tag{1}$$

gebracht. Wie sich dabei herausgestellt hat, spielt die sogenannte *Diskriminante* $\Delta = 27q^2 + 4p^3$ eine bedeutsame Rolle. Ist $\Delta > 0$, so besitzt die Gleichung (1) nur eine reelle Nullstelle; ist $\Delta = 0$, so besitzt sie eine reelle und eine weitere reelle doppelte Nullstelle, und im Falle $\Delta < 0$ drei reelle Nullstellen. Im weiteren Verlauf wollen wir den Koeffizienten p konstant halten und den Parameter q variieren. Geometrisch entspricht dies der Verschiebung der kubischen Parabel in Richtung y-Achse. Drei Graphiken, die Prof. Karl Fuchs angefertigt hat, sollen den Sachverhalt veranschaulichen.

Ist $p > 0$, so besitzt die kubische Parabel $y = x^3 + px + q$ keine lokalen Extrema, nur den Wendepunkt $(0, q)$. Daher wollen wir uns auf den Fall $p < 0$ beschränken. Wenn $q < 0$ dem Betrag nach genügend groß ist, so gibt es nur eine reelle Nullstelle $\alpha > 0$. Nun lassen wir den Parameter q wachsen.

Für $q = q_- = \frac{2p}{3} \cdot \sqrt{\frac{-p}{3}} < 0$ (siehe Bild rechts) wird erstmals

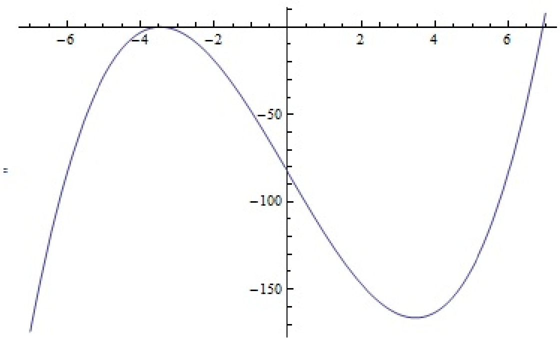
$$27(q_-)^2 + 4p^3 = 0.$$

Die Gleichung (1) hat die einfache Nullstelle

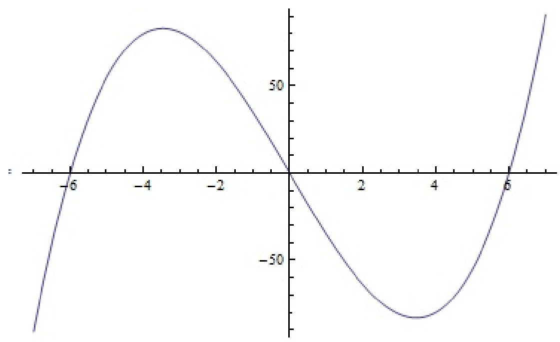
$$\alpha_1 = 2\sqrt[3]{-\frac{q_-}{2}}$$

und die zweifache Nullstelle

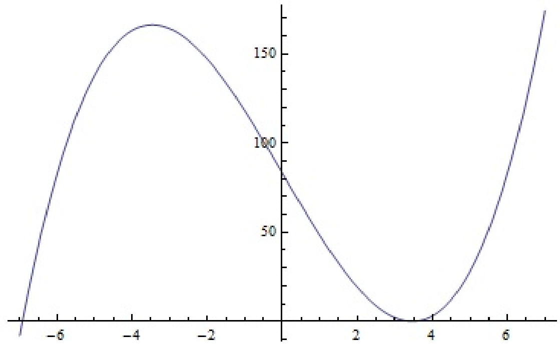
$$\alpha_2 = \alpha_3 = -\sqrt[3]{-\frac{q_-}{2}}.$$



Wenn nun q weiter wächst, so schiebt sich der Graph der kubischen Parabel nach oben. Bei $q = 0$ erreicht man $\alpha_3 = -\alpha_1$ und $\alpha_2 = 0$.



Für $q > 0$ hat man zunächst $\alpha_3 < 0$ und $0 < \alpha_2 < \alpha_1$. Wenn dann für $q = q_+ = -q_- > 0$ wieder gilt $27(q_+)^2 + 4p^3 = 0$, ist $\alpha_2 = \alpha_1$.



Für $q > q_+$ gibt es nur mehr eine reelle Nullstelle $\alpha < 0$.

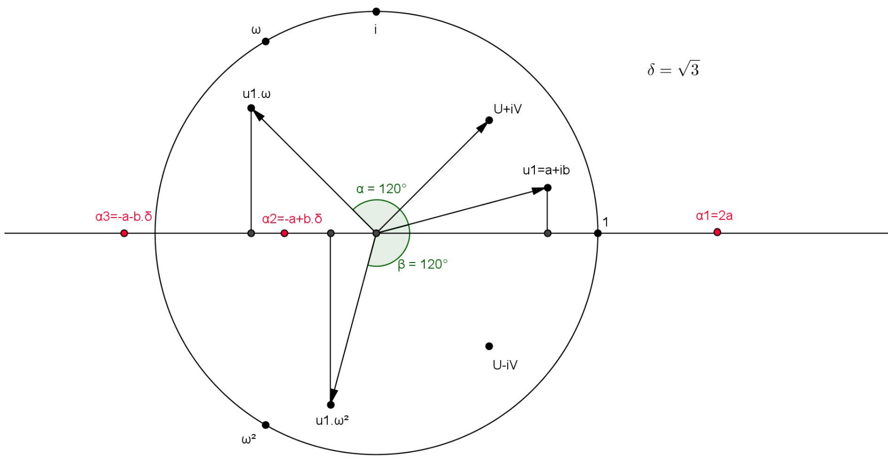
Diese geometrischen Betrachtungen können arithmetisch ergänzt werden. Wir wollen zuerst den *casus irreducibilis* von CARDANO, in dem die Formel

$$\alpha = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \frac{\sqrt{\Delta}}{6\sqrt{3}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \frac{\sqrt{\Delta}}{6\sqrt{3}}} \tag{2}$$

eigentlich drei verschiedene reelle Nullstellen liefern sollte, näher studieren. Zu diesem Zweck setzen wir

$$\begin{aligned} U &:= -\frac{q}{2} \\ V &:= \frac{\sqrt{-\Delta}}{6\sqrt{3}}, \quad \text{so} \quad \text{dass} \\ \alpha &= \sqrt[3]{U+iV} + \sqrt[3]{U-iV}. \end{aligned}$$

Wenn wir uns daran erinnern, dass Multiplikation zweier komplexer Zahlen die Multiplikation ihrer Absolutbeträge und die Addition der Winkel (*arg*) bedeutet, die ihre Ortsvektoren mit der positiven reellen Achse einschließen, hat das umgekehrt zur Folge, dass wir eine Kubikwurzel u_1 aus einer komplexen Zahl wie $U + iV$ erhalten, wenn wir aus dem Absolutbetrag $|U + iV| = \sqrt{U^2 + V^2}$ die dritte Wurzel ziehen und den Winkel $\arg(U + iV)$ dritteln.



Wenn wir das auch für die zu $U + iV$ *konjugiert komplexe* Zahl $\overline{U + iV} = U - iV$ durchführen, bekomen wir mit $\overline{u_1}$ eine Kubikwurzel aus $U - iV$ und $\alpha_1 = u_1 + \overline{u_1}$ ist eine Nullstelle von (1). In der Skizze ist das für $U + iV = 0,512\cos\frac{\pi}{4} + i \cdot 0,512\sin\frac{\pi}{4}$ und $u_1 = 0,8\cos\frac{\pi}{12} + i \cdot 0,8\sin\frac{\pi}{12}$ illustriert.

Aber wo sind die zwei weiteren reellen Nullstellen? Um das herauszufinden, bemühen wir die zwei komplexen Zahlen

$$\omega = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \overline{\omega} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

zusammen mit der Zahl 1 genannt *dritte Einheitswurzeln*, weil ihre dritten Potenzen 1 ergeben:

$$\begin{aligned}
\omega^2 &= \left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2} = \overline{\omega} \\
\omega^3 &= \overline{\omega}\cdot\omega = \left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1.
\end{aligned}$$

Alternativ liefert auch eine Anwendung des binomischen Lehrsatzes für die dritte Potenz eines Binoms

$$\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = -\frac{1}{8}-3\frac{1}{4}\cdot i\frac{\sqrt{3}}{2}+3\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}+i\frac{3}{4}\frac{\sqrt{3}}{2} = 1.$$

Damit erhalten wir mit $u_2 = u_1\cdot\overline{\omega}$ und $u_3 = u_1\cdot\omega$ zwei weitere Kubikwurzeln aus $U+iV$. Die Summen $u_2+\overline{u_2}$ und $u_3+\overline{u_3}$ sind dann die gesuchten restlichen zwei rellen Nullstellen von (1).

Für $u_1 = a+ib$ ergibt das $\alpha_1 = 2a$, $\alpha_2 = -a+b\sqrt{3}$ und $\alpha_3 = -a-b\sqrt{3}$ (wir können $b \geq 0$ annehmen). Da α_1, α_2 und α_3 Nullstellen von $x^3+px^2+q=0$ sind, errechnet man

$$p = \alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_3+\alpha_3\alpha_1 = -3a^2-3b^2, \quad q = -\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = 6ab^2-2a^3.$$

Wer Freude am Rechnen hat, kann auch noch

$$\Delta = -4\cdot 27b^2(3a^2-b^2)^2 \tag{3}$$

nachrechnen!

Wir betrachten die beiden Parameter a und b in einer ab-Ebene. Die Punkte (a,b) liegen auf der Kreislinie

$$a^2+b^2 = -\frac{p}{3}.$$

Für den Wert q_-, für den $\Delta = 0$ ist, hat man nach (2) den Startpunkt

$$(a,b) = \left(\sqrt[3]{-\frac{q_-}{2}},0\right).$$

Wenn nun der Parameter q wächst, bewegt sich der Punkt (a,b) (mit $b>0$) auf der Kreislinie gegen den Uhrzeigersinn. Im Punkt

$$(a,b) = \left(\frac{\sqrt{-p}}{2},\frac{\sqrt{-3p}}{6}\right)$$

ist $q=0$, also $\alpha_2 = 0$. Dieser Punkt ist der Schnittpunkt des Kreises mit der Geraden $\sqrt{3}b = a$ ($\arg u_1 = \frac{\pi}{6}$ entsprechend einem Winkel von 30°). Im Schnittpunkt mit der Geraden $b = \sqrt{3}a$ ($\arg u_1 = \frac{\pi}{3}$ entsprechend einem Winkel von 60°), nämlich

$$(a,b) = \left(\frac{\sqrt{-3p}}{6},\frac{\sqrt{-p}}{2}\right)$$

ist nach (3) wiederum $\Delta = 0$, also $q = q_+$ und somit $\alpha_3 = -a-b\sqrt{3}$ und $\alpha_2 = \alpha_1 = 2a$.

G. Helmberg