Österreichische
Mathematische
Gesellschaft

MATHE-BRIEF

Juni 2013 — Nr. 37

Herausgegeben von der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft
http: // www.oemg.ac.at / Mathe–Brief ——— mathe–brief@oemg.ac.at

Magie der Spiegelungen

Wenn wir uns im Spiegel betrachten, wo ist dann links und rechts? Eine Schrift sehen wir jedenfalls spiegelverkehrt. Was, wenn wir in eine Kombination aus zwei Spiegeln blicken? Ist das Bild immer „kaleidoskopartig“ und damit wenig aussagekräftig? Ausgehend von Spiegelungen an zwei parallelen bzw. einander rechtwinklig scheidenden Ebenen, soll hier die faszinierende und technisch vielfach anwendbare Spiegelung im Quader untersucht werden. Sie findet sich in Radar-Reflektoren, in den Pentaprismen der Spiegelreflexkameras und den hocheffizienten Augen von Flusskrebsen.

Aufgabenstellung: Spiegelungen in einem Quader

Um das Problem anschaulich in den Griff zu bekommen, betrachten wir verschiedene Teilaufgaben.

(a) Einfache Spiegelung an einer Spiegelebene

Ein virtuelles gespiegeltes Objekt verhält sich optisch wie das Original, und wir sehen gespiegelte „virtuelle Gegenwelten“ durch das „Spiegelfenster“. Bezogen auf die Spiegelebene wird nicht Links und Rechts vertauscht, sondern Vorne und Hinten. Original und gespiegeltes Objekt sind gegensinnig kongruent, können also nicht durch Drehungen oder Schiebungen zur Deckung gebracht werden.

(b) Mehrfach-Spiegelung an zwei parallelen Spiegeln

Figur 1

Betrachten wir das Verwirrspiel mit zwei parallelen Spiegeln in Figur 1: Der Fotograf konnte offensichtlich durch unterschiedliche Entfernungseinstellung jede beliebige der zur Auswahl stehenden Originale oder Spieglungen scharfstellen: Rein optisch kann nicht zwischen Original und virtuellen Objekten unterschieden werden, sodass nicht einmal sichergestellt ist, dass die abgebildete Person tatsächlich als solche zu sehen ist – dies hängt von der verwendeten Brennweite (i.W. also von der Öffnung des Sehkegels) ab.

(c) Mehrfach-Spiegelung an zwei zueinander rechtwinkligen Spiegeln

Figur 2

Jede der beiden Spiegelebenen ξ (Gleichung z.B. $x = 0$) und η (Gleichung z.B. $y = 0$) erzeugt zunächst ein virtuelles – gewöhnlich gespiegeltes – Gegenstück Ω_x (Vorzeichenänderung bei den x-Werten) bzw. Ω_y (y-Werte umgepolt) (Fig. 2). Die beiden Objekte sind gegensinnig kongruent und – vom Standpunkt der Wahrnehmung – dem Original Ω ebenbürtig.

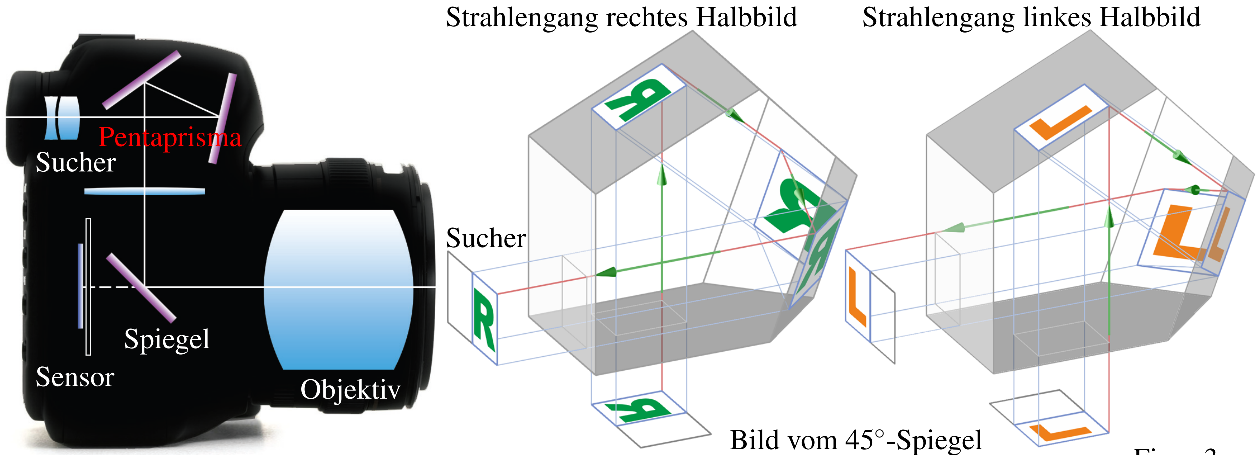
Konsequenterweise hat also Ω_x ein virtuelles Gegenstück Ω_{xy} durch Spiegelung an η, und ebenso Ω_y ein virtuelles Gegenstück Ω_{yx} durch Spiegelung an ξ. Wegen der speziellen Lage der Spiegelebenen ($\xi \perp \eta$) sind die beiden neuen Objekte allerdings ident: $\Omega^* = \Omega_{xy} = \Omega_{yx}$. Sie können überdies nur durch das jeweilige „Spiegelfenster" – teilweise – gesehen werden. Der mit Ω_{yx} beschriftete Teil entsteht dabei durch Spiegelung des im rechten Spiegelfenster sichtbaren virtuellen Objektes Ω_y am linken Spiegelfenster.

Die beiden Spiegelfenster berühren einander längs der Schnittkante $s = \xi \cup \eta$ (bei unserer Wahl die z-Achse), verschmelzen also zu einem einzigen Fenster, das aus zwei aufeinander senkrecht stehenden Rechtecken besteht. Durch dieses kann unser Objekt Ω^* betrachtet werden. Es entstand durch zweimalige Spiegelung und ist daher wieder *gleichsinnig* kongruent. Die beiden gleichsinnig kongruenten Objekte Ω und Ω^* können somit durch eine Drehung um $180°$ um die Schnittachse s der Spiegelebenen, oder aber durch eine axiale Spiegelung an s ineinander übergeführt werden. Dabei werden erstmalig tatsächlich Links und Rechts vertauscht, und Schriftzüge erscheinen nicht spiegelverkehrt, sondern sind wie gewöhnlich lesbar.

Beim Foto (Fig. 2) wurde ein Weitwinkelobjektiv verwendet, um die „Hilfsobjekte" Ω_x und Ω_y zur Gänze sichtbar zu machen. In der Praxis (auch beim menschlichen Sehen) ist der Sehwinkel kleiner, und man sieht dann nur noch Ω^* im Bild – einem gewöhnlichen Spiegelbild zwar vergleichbar, aber mit *vertauschtem Links und Rechts*.

Anwendung beim Sucher einer Spiegelreflexkamera: Jede solche Kamera hat eine genial-einfache Erfindung eingebaut: Durch das Objektiv gelangen die Lichtstrahlen auf den Sensor. Das Bild wird dabei um 180 gedreht, sodass es hinter dem Objektiv auf dem Kopf zu stehen scheint. Man will genau dieses Bild schon vorher durch den Sucher sehen, allerdings natürlich aufrecht stehend. Zwischen Objektiv und Sensor ist ein unter $45°$ gekippter Spiegel eingeschoben, der erst beim eigentlichen Fotografieren hochgeklappt wird. Ein dazu parallel liegender Spiegel würde das Bild wieder in den Sucher lenken, allerdings immer noch gedreht. Diese Drehung korrigiert stattdessen ein in der Kamera liegendes fünfseitiges (innen verspiegeltes) Prisma. Der Klapp-Spiegel lenkt die einfallenden Lichtstrahlen nach oben in dieses Prisma. Dort wird zunächst zweifach gespiegelt. Nach insgesamt drei Spiegelungen erscheint das Bild spiegelverkehrt im Sucher. Um es „im letzten

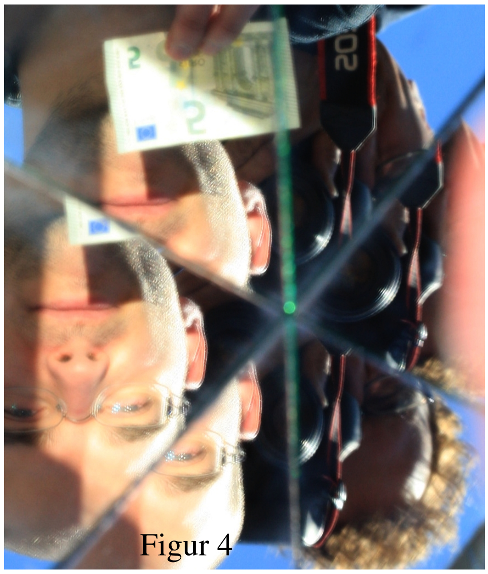
Augenblick“ umzudrehen, schaltet man eine „Dachkante“ ein (zwei einander rechtwinklig scheidende Ebenen, die, wie Fig. 3 zeigt zwei zusätzliche Spiegelungen bewerkstelligen). Man spricht hier gelegentlich auch von einem „Wendeprisma“, aber auch von einem „Dachkant-Pentaprisma“.



Figur 3

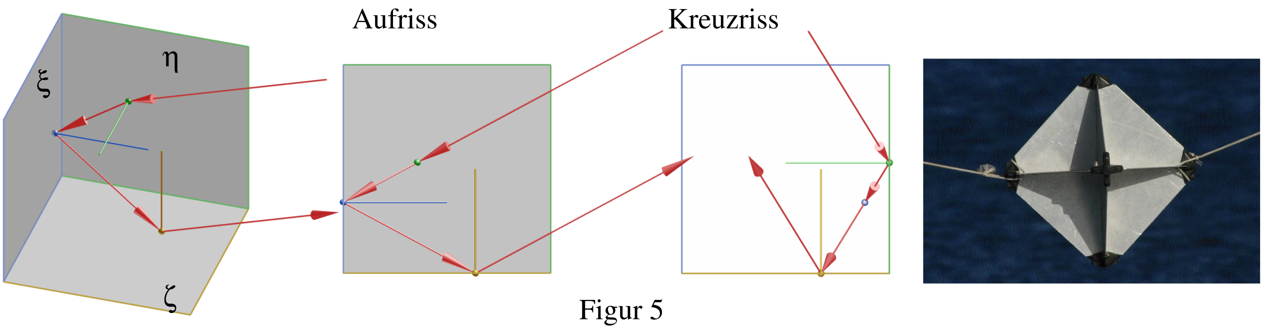
(d) Spiegelung im Quadereck

Schalten wir jetzt eine dritte Spiegelebene ζ rechtwinklig zu den schon vorhandenen Ebenen ξ und η ein (Gleichung z.B. $z = 0$). Wird an ihr gespiegelt, werden die z-Werte umgepolt. Die Punkte (x, y, z) eines Objekts Ω, das an allen drei Ebenen genau einmal gespiegelt wird, haben dann die Koordinaten $(-x, -y, -z)$. Ω_{xyz} entspricht somit einer Punktspiegelung am Schnittpunkt aller Ebenen. Es erscheint am Foto spiegelverkehrt und am Kopf stehend.



Figur 4

Fig. 4 zeigt, wie in so ein Spiegeleck (mit einem Teleobjektiv) hineinfotografiert wurde. Bei exakter Rechtwinkligkeit aller Ebenen hätten sich alle Teilbilder perfekt zu einem – am Kopf stehenden – Bild vereinigt. Durch die Ungenauigkeit der Winkel sieht man, wie sich die sechs Spiegelbilder Ω_{xyz}, Ω_{yxz}, Ω_{zxy} usw. leicht unterscheiden. Am mit abgebildeten Fünf-Euro-Schein erkennt man, dass das Bild (wenn perfekt zusammengesetzt) Schriften spiegelverkehrt erscheinen lässt.



Figur 5

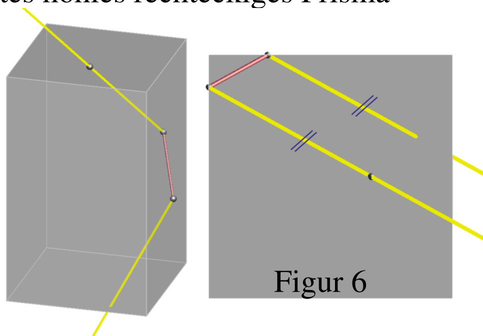
Fig. 5 zeigt den Strahlengang beim Eintreffen eines Lichtstrahls in eine Quaderecke. Weil in jedem Hauptriss das klassische „Billard-Problem“ zu erkennen ist, tritt der Lichtstrahl parallel zur Einfallsrichtung aus (es werden beim Richtungsvektor die einzelnen Koordinaten umgepolt).

Auch hier gibt es nützliche Anwendungen, etwa beim Sucher im Teleskop. Damit das Bild dort nicht spiegelverkehrt erscheint, wird „schnell noch“ am Schluss in bewährter Weise ein Dachkant eingebaut.

Eine weitere Anwendung ist der Radarreflektor (Fig. 5 rechts), der an vielen Segelschiffen baumelt. Egal, aus welcher Richtung das Schiff angepeilt wird – die Strahlen kommen zum Sender zurück. Auch die „Katzenaugen“ in den orangefarbenen Reflektoren der Fahrräder haben Quaderecken eingestanzt: Aus welcher Richtung ein Autoscheinwerfer das Rad anstrahlt: Der Lenker des Autos sieht das Aufleuchten der Reflektoren.

(e) Der Durchgang eines Lichtstrahls durch ein verspiegeltes hohles rechteckiges Prisma

Fig. 6 zeigt, wie ein Lichtstrahl ein solches durchwandern kann. Die Anzahl und Aufeinanderfolge der Reflexionen entscheidet, in welcher Richtung er austritt. Der angegebene Fall ist besonders interessant: In der Draufsicht (ganz rechts) verlässt der Strahl das Prisma parallel zum eingehenden Strahl, allerdings hat die z-Komponente des Richtungsvektors nicht das Vorzeichen gewechselt.

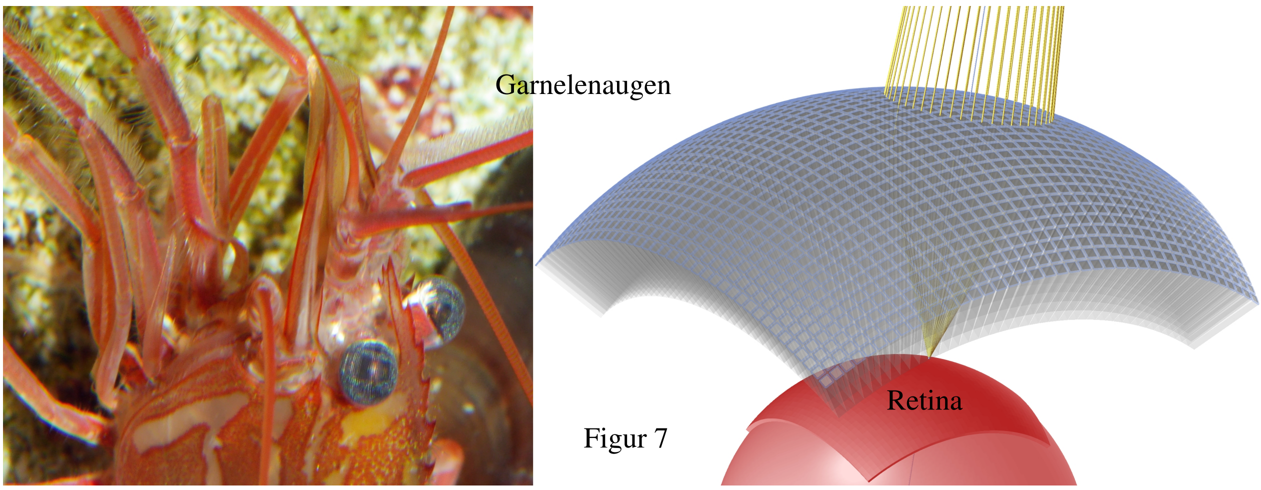

Figur 6

Ist der Durchmesser des Prismas sehr klein, gilt mit guter Näherung: Der Lichtstrahl verhält sich so, als ob er an einer achsenparallelen Ebene (senkrecht zum Grundriss des einfallenden Strahls) gespiegelt würde. Dies machen sich Flusskrebse und Garnelen zunutze, die tausende mikroskopisch kleine quadratische Spiegelprismen and der sphärisch gekrümmten Oberfläche ihrer Augen haben. Dadurch werden parallele Lichtstrahlen mittels Reflexion so auf eine konzentrische kugelförmige Netzhaut gebündelt, dass dort ein aufrechtes, lichtstarkes Bild der Umgebung entsteht (Fig. 7).

Georg Glaeser

[1] G. Glaeser: *Wie aus der Zahl ein Zebra wird*, Spektrum Springer Heidelberg, 2010.

[2] G. Glaeser, H. Paulus: *Die Evolution des Auges – ein Fotoshooting*, Spektrum Springer Heidelberg, Juli 2013.



Figur 7