Österreichische
Mathematische
Gesellschaft

MATHE-BRIEF

März 2013 — Nr.34

Herausgegeben von der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft
http: // www.oemg.ac.at / Mathe–Brief ——— mathe–brief@oemg.ac.at

Cardano und die algebraische Gleichung 3. Grades

Eine gute alte Bekannte ist die quadratische Gleichung

$$x^2 + px + q = 0. \tag{1}$$

Sie hat zwei Lösungen

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}, \qquad x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \tag{2}$$

und lässt sich mit ihnen auch so schreiben:

$$\begin{aligned} x^2 + px + q &= (x - x_1)(x - x_2) \\ &= x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = 0. \end{aligned}$$

Ein Vergleich mit (1) liefert der sogenannte Wurzelsatz von VIETA

$$x_1 + x_2 = -p, \qquad x_1 x_2 = q. \tag{3}$$

Es ist nicht verwunderlich, dass sich schon im Mittelalter Mathematiker gefragt haben, wie man auf eine Lösung der Gleichung

$$x^3 + ux^2 + vx + w = 0 \tag{4}$$

kommen könnte, und tatsächlich hat diese Frage zu einem erbitterten Streit zwischen den italienischen Mathematikern GEROLAMO CARDANO (1501–1576) und NICCOLÒ TARTAGLIA (1500–1557) geführt. Folgen wir ihren Spuren:

Als ersten Schritt vereinfachen wir die Gleichung (4) durch Elimination des Gliedes ux^2 mittels der Substitution

$$x = y + \alpha. \tag{5}$$

Diese führt — nachdem wir uns an die Binomialformeln für $(y+\alpha)^3$ und $(y+\alpha)^2$ erinnert haben — Gleichung (4) über in

$$\begin{aligned} (y^3 + 3\alpha y^2 + 3\alpha^2 y + \alpha^3) + u(y^2 + 2\alpha y + \alpha^2) + v(y + \alpha) + w &= 0 \\ y^3 + (3\alpha + u)y^2 + (3\alpha^2 + 2\alpha u + v)y + (\alpha^3 + \alpha^2 u + \alpha v + w) &= 0. \end{aligned}$$

Jetzt wählen wir $\alpha = -\frac{u}{3}$ und setzen für die anderen zwei Klammerausdrücke

$$\begin{aligned} a &= \frac{u^2}{3} - 2\frac{u^2}{3} + v &&= -\frac{u^2}{3} + v \\ b &= -\frac{u^3}{27} + \frac{u^3}{9} - \frac{uv}{3} + w &&= \frac{2u^3}{27} - \frac{uv}{3} + w. \end{aligned}$$

Gleichung (4) nimmt damit folgende Gestalt an:

$$y^3 + ay + b = 0. \tag{6}$$

Wenn wir diese Gleichung lösen können, brauchen wir nur $x = y - \frac{u}{3}$ zu setzen und haben die Lösungen der Gleichung (4).

Jetzt kommt die Königsidee: wir zerlegen y in eine Differenz $\gamma - \beta$ und versuchen, die beiden Zahlen β und γ so zu finden, dass $y = \gamma - \beta$ die Gleichung (6) erfüllt. Dazu überlegen wir uns die folgenden Schritte:

$$\begin{aligned} \gamma &= y + \beta \\ \gamma^3 &= y^3 + 3\beta y^2 + 3\beta^2 y + \beta^3 = y^3 + 3\beta y(y+\beta) + \beta^3 \\ &= y^3 + 3\beta\gamma y + \beta^3. \end{aligned}$$

Der letzte Schritt liefert uns die Gleichung

$$y^3 + (3\beta\gamma)y + (\beta^3 - \gamma^3) = 0, \tag{7}$$

die also durch $y = \gamma - \beta$ erfüllt wird. Wenn es uns gelingt, die Zahlen β und γ so zu finden, dass sie

$$3\beta\gamma = a, \qquad \beta^3 - \gamma^3 = b \tag{8}$$

erfüllen, dann ist $y = \gamma - \beta$ eine Lösung der Gleichung (6). Dazu erinnern wir uns an den Satz von VIETA, in dem wir

$$x_1 = \beta^3, \qquad x_2 = -\gamma^3$$

setzen – das mag etwas willkürlich anmuten, ist aber zielführend. Die erste Gleichung in (8) liefert uns $a^3 = 27\beta^3\gamma^3$ und zusammen mit der zweiten Gleichung in (8)

$$x_1 + x_2 = b, \qquad x_1 x_2 = -\frac{a^3}{27}.$$

Also sind $x_1 = \beta^3$ und $x_2 = -\gamma^3$ die Lösungen der quadratischen Gleichung

$$x^2 - bx - \frac{a^3}{27} = 0$$

und wir erhalten

$$\begin{aligned} \beta^3 &= x_1 = \frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}} \\ -\gamma^3 &= x_2 = \frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}} \\ y &= \gamma - \beta = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}} - \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}} \qquad (9) \\ &= \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \frac{\sqrt{27b^2 + 4a^3}}{6\sqrt{3}}} - \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \frac{\sqrt{27b^2 + 4a^3}}{6\sqrt{3}}}. \end{aligned}$$

Diese Lösung hatte TARTAGLIA 1535 anlässlich eines Wettstreites mit ANTONIO MARIA FIOR, einem Schüler des Bologneser Professors SCIPIONE DAL FERRO (1465–1526) gefunden. Sein Fachkollege CARDANO war 1539 anlässlich der Fertigstellung seines Buches *Practica Arithmeticae Generalis* sehr daran interessiert, die Lösung der Gleichung dritten Grades kennenzulernen und entlockte sie dem widerstrebenden TARTAGLIA gegen das Versprechen, sie nicht zu publizieren. Allerdings brachte er 1543 bei einem Besuch bei DAL FERROs Nachfolger, ANNIBALE DELLA NAVE, in Erfahrung, dass DAL FERRO diese Lösung bereits gekannt habe. Offenbar hatte er daraufhin keine Skrupel, diese Lösung 1545 in seinem Buch *Ars Magna* bekannt zu machen, sehr zum Missvergnügen TARTAGLIAS.

Die heutzutage unter dem Namen CARDANOs bekannte Formel (9) ist noch für einige Überraschungen gut. Für die Gleichung

$$x^3 + 3x - 4 = 0$$

liefert sie beispielsweise die Lösung

$$x = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} - \sqrt[3]{-2+\sqrt{5}},$$

die für einen brauchbaren Taschenrechner (und auch mathematisch) mit der offensichtlichen Lösung $x = 1$ übereinstimmt, eine Formel, die auf anderem Wege schwer ableitbar ist.

Offenbar bleibt man bei der Berechnung der Lösung (9) nur dann im Bereich der reellen Zahlen, wenn die Größe

$$\Delta = 27b^2 + 4a^3$$

größer als oder gleich Null ist. Wenn das nicht der Fall ist, wie bei der Gleichung

$$x^3 - 4x + 3 = 0,$$

die ja auch die Lösung $x = 1$ besitzt, führt uns die Formel (9) unweigerlich ins Komplexe — sie liefert uns nur

$$x = \sqrt[3]{-\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{-13}}{6\sqrt{3}}} - \sqrt[3]{\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{-13}}{6\sqrt{3}}}.$$

Ausserdem erwarten wir für eine algebraische Gleichung dritten Grades doch eigentlich nicht nur eine Lösung, sondern drei Lösungen, von denen allerdings zwei möglicherweise konjugiert komplex sein können. Offenbar spielen hier komplexe dritte Wurzeln, an die man zunächst nicht denkt, eine Rolle.

Eine bessere Einsicht in diese Situation erhalten wir am besten auf geometrischem Wege, indem wir den Graphen der Funktion

$$y = x^3 + ax + b \tag{10}$$

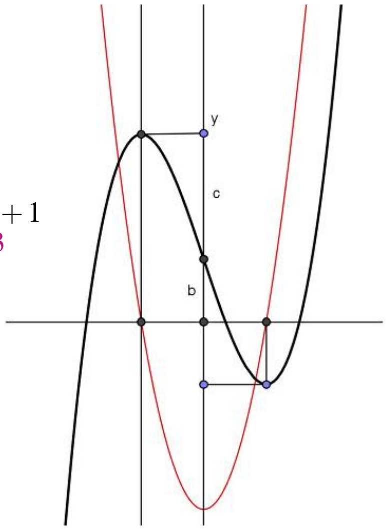
auf Nullstellen untersuchen. Die Funktion (10) strebt für $x \to -\infty$ gegen $-\infty$ und für $x \to +\infty$ gegen $+\infty$. Als stetige Funktion muß sie deshalb mindestens eine reelle Nullstelle besitzen. Zwei getrennt liegende lokale Extrema nimmt sie nur für $a < 0$ an, und zwar — wenn wir zur Vereinfachung der Schreibweise

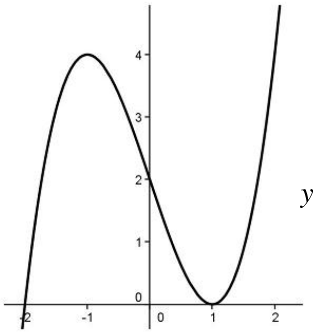
$$c = -\frac{2a}{3}\sqrt{-\frac{a}{3}} > 0$$

setzen — ein lokales Maximum im Punkt $(-\sqrt{-\frac{a}{3}}, b+c)$ und ein lokales Minimum im Punkt $(\sqrt{-\frac{a}{3}}, b-c)$.

Sie hat also drei reelle Nullstellen, wenn das Maximum und das Minimum der Funktionswerte verschiedene Vorzeichen haben, also wenn $|b| < c$, eine einfache und eine doppelte reelle Nullstelle, wenn $|b| = c$ — beispielsweise für $y = x^3 - 3x + 2 = (x+2)(x-1)^2$ —, und genau eine reelle

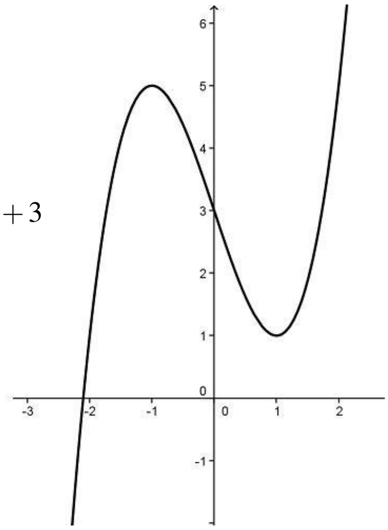
$y = x^3 - 3x + 1$
$y' = 3x^2 - 3$

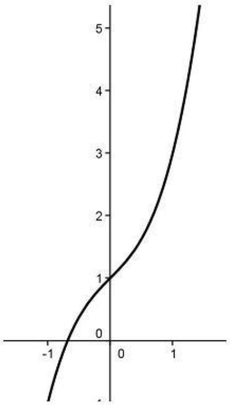




$y = x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2)$

$y = x^3 - 3x + 3$





$y = x^3 + x + 1$

Nullstelle, wenn $|b| > c$ (natürlich können alle numerisch, z.B. mit dem Newtonschen Näherungsverfahren, mit beliebiger Genauigkeit berechnet werden).

Dieser letzte Fall ist gekennzeichnet durch die Ungleichung $b^2 > c^2 = -\frac{4a^3}{27}$ oder, äquivalenterweise,

$$27b^2 + 4a^3 > 0,$$

und in diesem Falle — der auch für $a \geq 0$ eintritt — liefert die Formel (9) die einzige reelle Nullstelle. Wenn $27b^2 + 4a^3 = 0$, dann liefert (9) noch die einfache reelle Nullstelle $x = -2 \cdot \sqrt[3]{b/2}$, und wenn $27b^2 + 4a^3 < 0$ — für CARDANO war das der *casus irreducibilis* — müssen komplexe dritte Wurzeln herhalten, um die reellen Nullstellen zu liefern — aber das ist eine andere Geschichte.

Gilbert Helmberg

Quelle

SIMON GINDIKIN: *Tales of Mathematicians and Physicists*, New York: Springer 2007 (2nd Ed.).