Österreichische
Mathematische
Gesellschaft

MATHE-BRIEF

Februar 2013 — Nr. 33

Herausgegeben von der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft
http://www.oemg.ac.at/Mathe–Brief ——— mathe–brief@oemg.ac.at

BABYLONISCHES WURZELZIEHEN

Wenn $A > 1$ gegeben ist, so findet man eine Näherung von $\sqrt{A}$ durch ein Verfahren, welches als 'Babylonisches Wurzelziehen' bekannt ist. Man setzt

$$x_0 = A, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{A}{x_n}\right)$$

und iteriert. Dann ist $x_n > x_{n+1}$ und $\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{A}$. Das Verfahren konvergiert, wie man schon auf einem Taschenrechner feststellen kann, sehr rasch. Tatsächlich ist es das Newtonsche Näherungsverfahren, mit dem man eine Nullstelle der Funktion $f(x) = x^2 - A$ berechnet. Die Babylonier haben diesen speziellen Fall allerdings schon einige Zeit vor Newton, nämlich seit ungefähr 3000 v.Chr. gekannt ([**1**]).

Man kann auch statt $x_0 = A$ jeden beliebigen Wert $x_0 > 0$ wählen, denn das Verfahren ist „selbstkorrigierend", sodass auch ein kleiner Fehler beim Rechnen bald wieder weggezaubert ist. Je näher man allerdings den Anfangswert x_0 bei der Wurzel aus A wählt, desto weniger Schritte braucht man, um $\sqrt{A}$ mit einer gewünschten Dezimal-Stellenzahl genau zu berechnen.

Man kann fragen, ob dieses Verfahren auch für $\sqrt[N]{A}$ verwendbar ist. Wenn man etwas unbekümmert

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{A}{x_n^{N-1}}\right).$$

setzt und die Folge der x_n einen Grenzwert ξ hätte, müsste dieser dann die Gleichung

$$\xi = \frac{1}{2}\left(\xi + \frac{A}{\xi^{N-1}}\right)$$

erfüllen, also tatsächlich eine Wurzel der Gleichung $\xi^N = A$ sein. Es stellt sich heraus, dass dieses Verfahren für $N = 3$ noch ganz gut funktioniert, für $N = 4$ gerade noch, aber für $N = 5$ endgültig schief geht! Wir nehmen an, dass x_n nahe bei $\sqrt[5]{A}$ sei. Dann errechnet man mittels der Rekursionsformel

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{A}{x_n^4}\right)$$

die Differenz

$$
\begin{aligned}
x_{n+1} - \sqrt[5]{A} &= \frac{1}{2}\Big(x_n + \frac{A}{x_n^4} - \sqrt[5]{A} - \frac{A}{\sqrt[5]{A^4}}\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big(x_n - \sqrt[5]{A} - A\frac{x^4 - \sqrt[5]{A^4}}{x_n^4\sqrt[5]{A^4}}\Big) \\
&= (x_n - \sqrt[5]{A})\frac{1}{2}\Big(1 - A\frac{\sqrt[5]{A^3} + \sqrt[5]{A^2}x_n + \sqrt[5]{A}x_n^2 + x_n^3}{x_n^4\sqrt[5]{A^4}}\Big).
\end{aligned}
$$

Wir haben dazu die Beziehung

$$a^4 - b^4 = (a-b)(a^3 + a^2 b + ab^2 + b^3)$$

mit $a = x_n,\ b = \sqrt[5]{A}$ verwendet. Ist aber (eher zufällig) $x_n \approx \sqrt[5]{A}$, so ist

$$A\frac{\sqrt[5]{A^3} + \sqrt[5]{A^2}x_n + \sqrt[5]{A}x_n^2 + x_n^3}{x_n^4\sqrt[5]{A^4}} \ \approx\ 4$$

und damit

$$x_{n+1} - \sqrt[5]{A} \quad \approx \quad -\frac{3}{2}(x_n - \sqrt[5]{A}).$$

Dies bedeutet, dass x_{n+1} sich von $\sqrt[5]{A}$ wieder entfernt hat und daher das Verfahren nicht konvergieren kann. Offenbar war die Rekursionsformel doch nicht so geschickt gewählt.

Zum Ziel führt der (wieder dem Newtonschen Näherungsverfahren entstammende) Ansatz

$$x_{n+1} = \frac{1}{N}\Big((N-1)x_n + \frac{A}{x_n^{N-1}}\Big).$$

Dann ist nämlich (sofern $x_0 > \sqrt[N]{A}$ gewählt wurde)

(*) $$x_{n+1} = \frac{1}{N}\Big(x_n + x_n + \cdots + x_n + \frac{A}{x_n^{N-1}}\Big) \ \geq\ \sqrt[N]{A}$$

und weiters

(**) $$x_n \ >\ x_{n+1} \ =\ \frac{1}{N}\Big((N-1)x_n + \frac{A}{x_n^{N-1}}\Big).$$

Die erste Behauptung (*) folgt aus der arithmetisch-geometrischen Ungleichung

$$\frac{a_1 + \cdots + a_N}{N} \geq \sqrt[N]{a_1 \cdots a_N}.$$

Als Alternative könnte man die Untersuchung der Funktion

$$f(t) = (N-1)t + \frac{A}{t^{N-1}}$$

anbieten. Diese hat ein Minimum bei $t_0 = \sqrt[N]{A}$.

Die zweite Behauptung (**) ist äquivalent zu

$$Nx_n > (N-1)x_n + \frac{A}{x_n^{N-1}},$$

also zu

$$x_n^N > A.$$

Daher ist die Folge $x_0, x_1, x_2, \ldots$ monoton fallend; sie hat $\sqrt[N]{A}$ als untere Schranke, somit auch einen Grenzwert ξ. Dieser erfüllt dann

$$\xi = \frac{1}{N}\left((N-1)\xi + \frac{A}{\xi^{N-1}}\right),$$

also ist $\xi = \sqrt[N]{A}$.

F. Schweiger

Literatur

[**1**] Hans Kaiser/Wilfried Nöbauer: *Geschichte der Mathematik für den Schulunterricht.* Verlag Hölder-Pichler-Tempsky, Wien 1984.