Österreichische
Mathematische
Gesellschaft

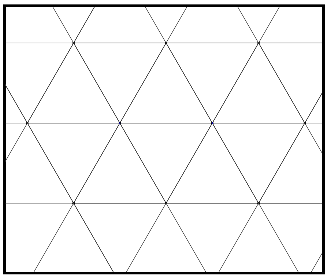
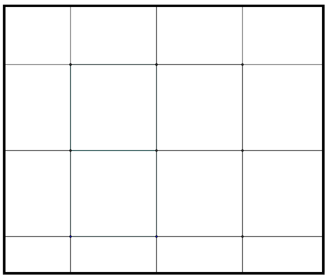
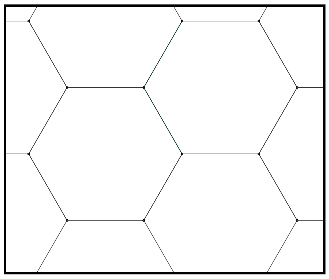
MATHE-BRIEF

Jänner 2013 — Nr. 32

Herausgegeben von der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft
http: // www.oemg.ac.at / Mathe–Brief ——— mathe–brief@oemg.ac.at

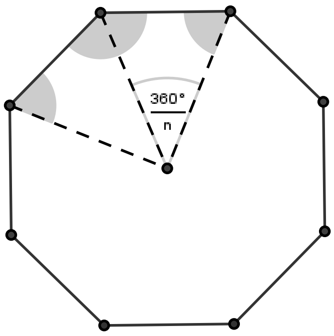
PARKETTIERUNGEN DER EBENE

Bekannt sind die *regulären „platonischen“* Parkettierungen der Ebene mit regelmäßigen Dreiecken, Vierecken und Sechsecken:

Geht das auch mit regelmäßigen Fünf- oder Siebenecken oder anderen n-Ecken? Um diese Frage zu beantworten, erinnen wir uns, dass im regelmäßigen n–Eck jeder Innenwinkel

$$180^\circ - \frac{360^\circ}{n} = 360^\circ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right)$$



beträgt. Wenn daher in einer Ecke k regelmäßige n-Ecke aneinanderstoßen sollen, so erhalten wir die Gleichung

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{n} = \frac{1}{k}.$$

Aus $k \geq 3$ folgt daher

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{k} \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6},$$

das heißt $n \leq 6$. Durch Einsetzen von $n = 3,4,5,6$ erhalten wird die Lösungen

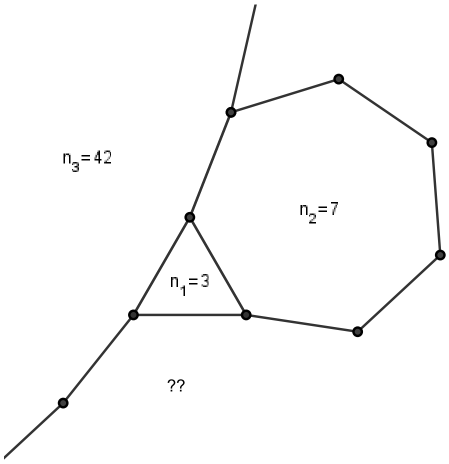
$$(n,k) \in \{(3,6),(4,4),(6,3)\},$$

was auf die genannten platonischen Parkettierungen führt. Für $n = 5$ ergibt sich $k = \frac{10}{3}$, also keine geeignete Lösung. Bei einer *halbregulären („archimedischen“)* Parkettierung dürfen in einer Ecke k (möglicherweise) verschiedene regelmäßige Vielecke zusammenstoßen. Wir erhalten die Gleichung

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n_1}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n_2}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n_k}\right) = 1.$$

Archimedische Parkettierungen mit 3 Vielecken pro Ecke. Speziell für $k = 3$ gilt

(1)
$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = \frac{1}{2}$$



Diese Gleichung hat Lösungen, wie zum Beispiel

$$(n_1, n_2, n_3) = (3, 7, 42),$$

die nicht zu einer Parkettierung der Ebene führen. Dies liegt daran, dass 3 ungerade ist und die 7- bzw. 42-Ecke abwechselnd um das Dreieck herumliegen müssten. Wir suchen also Lösungen (n_1, n_2, n_3) von (1) mit $n_1, n_2, n_3 \geq 3$ und der Eigenschaft:

(2)
$$\begin{cases} \text{Wenn } n_1 \text{ ungerade ist, so gilt } n_2 = n_3, \\ \text{Wenn } n_2 \text{ ungerade ist, so gilt } n_1 = n_3, \\ \text{Wenn } n_3 \text{ ungerade ist, so gilt } n_1 = n_2, \end{cases}$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen, dass $3 \leq n_1 \leq n_2 \leq n_3$. Daraus folgt

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} \leq \frac{3}{n_1},$$

also $n_1 \leq 6$.

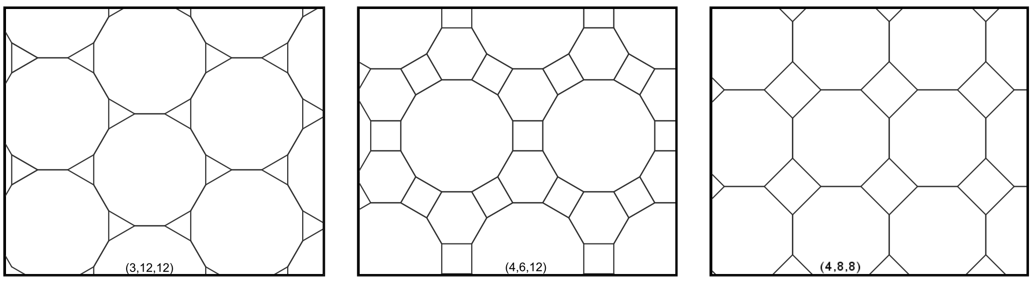
- *1. Fall:* Wenn $n_1 = 3$, so erhalten wir $n_2 = n_3 = 12$.
- *2. Fall:* Für $n_1 = 4$ folgt

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} \leq \frac{2}{n_2},$$

also $4 \leq n_2 \leq 8$. Da $n_2 = 4$ keine Lösung ergibt und n_2 gerade sein muss (sonst wäre wegen (2) $n_3 = n_1 = 4$), erhalten wir nur für $n_2 = 6$ und $n_2 = 8$ Lösungen, nämlich

$$(n_1, n_2, n_3) = (4, 6, 12) \quad \text{und} \quad (n_1, n_2, n_3) = (4, 8, 8).$$

- *3. Fall:* Wenn $n_1 = 5$, so ergibt sich wegen $n_2 = n_3$ keine ganzzahlige Lösung.
- *4. Fall:* Wenn schließlich $n_1 = 6 \leq n_2 \leq n_3$, so ersehen wir wegen $\frac{1}{n_3} \leq \frac{1}{n_2} \leq \frac{1}{n_1} = \frac{1}{6}$, dass $n_1 = n_2 = n_3 = 6$ die einzige Lösung von (1) ist. Also erhalten wir neben dem schon bekannten Bienenwabenmuster $(6, 6, 6)$ die folgenden Parkettierungen:



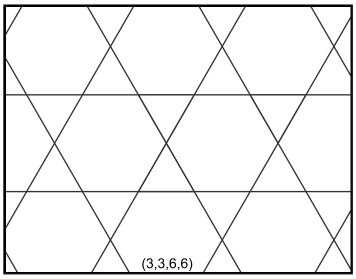
Archimedische Parkettierungen mit 4 Vielecken pro Ecke. Ähnlich erhält man für $k = 4$ die Gleichung

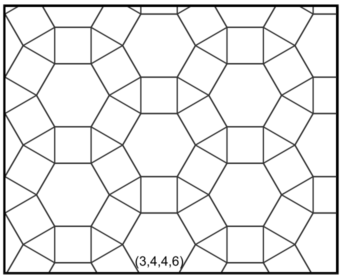
$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} = 1 \tag{3}$$

mit den Lösungen

$$(3,3,4,12),\ (3,3,6,6),\ (3,4,4,6),\ (4,4,4,4),$$

von denen die erste keine Parkettierung liefert und die letzte das schon bekannte Schachbrettmuster.

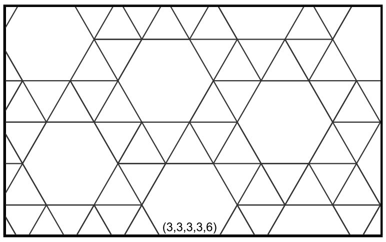


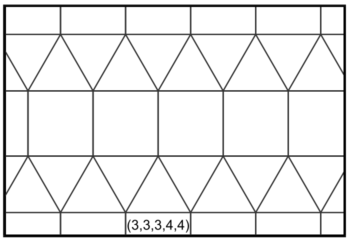


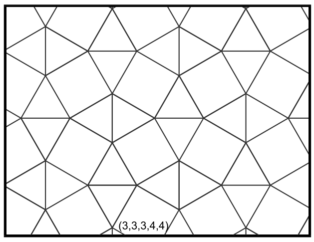
Archimedische Parkettierungen mit 5 Vielecken pro Ecke. Analog erhält man für $k = 5$ die Gleichung

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} + \frac{1}{n_5} = \frac{3}{2}$$

mit den Lösungen $(3,3,3,3,6)$ und $(3,3,3,4,4)$, wobei letztere zwei verschiedene Parkette liefert.







Archimedische Parkettierungen mit mehr als 5 Vielecken pro Ecke. Schließlich hat für $k = 6$ die Gleichung

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} + \frac{1}{n_5} + \frac{1}{n_6} = 2$$

nur die Lösung $(3,3,3,3,3,3)$, also das „platonische“ Dreiecksmuster. Für $k \geq 7$ hat

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n_1}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n_2}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n_k}\right) = 1$$

keine Lösungen mit $n_1, \ldots, n_k \geq 3$, denn

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{n_i} \geq \frac{1}{6},$$

und daher ist die linke Seite größer als 1. Für weitere Informationen siehe die Literatur und das Stichwort „Parkettierung“ der *Wikipedia (http://de.wikipedia.org/wiki/Parkettierung)*.

Gerhard Kirchner

Literatur: H. Reeker, E. Müller (Hrsg.): Mathe ist cool! Eine Sammlung mathematischer Probleme, Cornelsen Verlag, Berlin, 2001. Kapitel 11.