Österreichische Mathematische Gesellschaft

MATHE-BRIEF

Dezember 2012 — Nr. 31

Herausgegeben von der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft
http: // www.oemg.ac.at / Mathe–Brief ——— mathe–brief@oemg.ac.at

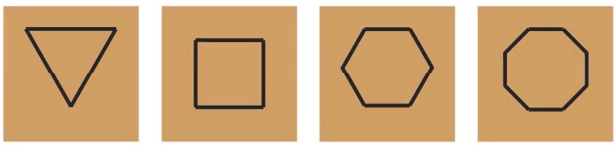
Liebe Kolleginnen und Kollegen,

die Österreichische Mathematische Gesellschaft hat ein neues Logo, das auch zu einer Umgestaltung des Kopfes der Mathe-Briefe geführt hat. Wir hoffen, es gefällt Ihnen.

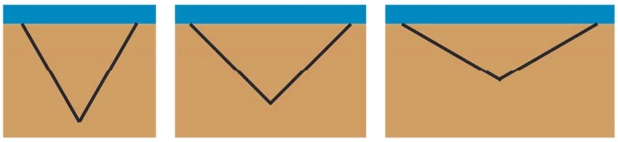
Die Redaktion.

DAS PROBLEM DER DIDO

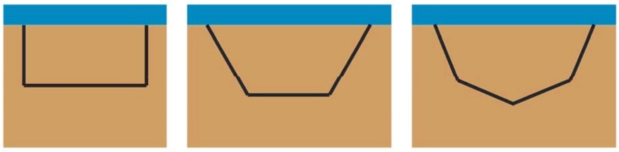
Von der legendären phönizischen Prinzessin Dido, die auf der Flucht vor ihrem machtgierigen Bruder Pygmalion, gemeinsam mit einem ganzen Hofstaat von Bediensteten und Beratern als Flüchtlingen, an der Küste des heutigen Tunesiens landete, wird berichtet, dass sie den dort regierenden Stammesführer Jarbas um Land bat. Dieser versprach ihr, dass sie soviel Land bekäme, wie sie mit einer Kuhhaut umspannen könne. Dido ging auf den Handel ein, schnitt aber daraufhin die Kuhhaut in hauchdünne Streifen, knüpfte diese aneinander und erhielt so ein langes Band, das sie als Umfang ihres Landes ausspannen wollte. Nun entstand die Frage, welche Form das Band einnehmen sollte, damit es ein Land mit möglichst großem Flächeninhalt umspannt.



Vielleicht, so vermutete der erste Berater der Dido, wäre ein gleichseitiges Dreieck keine schlechte Wahl. Nehmen wir an, das Band hätte den Umfang von einer Meile (wie lang auch immer eine Meile sein mag), so hat das von ihm eingeschlossene gleichseitige Dreieck nur den Inhalt von 0,048 ... Quadratmeilen — reichlich wenig. Ein anderer Vorschlag war, das Flächenstück als Quadrat zu formen, das Band wird also in Form der Seiten eines Quadrats gelegt, jede Quadratseite ist nur eine Viertelmeile lang und dementsprechend nimmt das Quadrat 0,0625 Quadratmeilen als Flächeninhalt ein. Diese Wahl ist bereits vorteilhafter. Aber noch immer nicht die beste. Noch klüger war der Vorschlag, die Fläche in Form eines regelmäßigen Sechsecks zu wählen. Dieses setzt sich aus sechs gleichseitigen Dreiecken zusammen. von denen jedes eine seiner Seiten zum Umfang beiträgt. Daher ist das Sechstel einer Meile die Seitenlänge jedes der sechs gleichseitigen Dreiecke. Der Flächeninhalt des Sechsecks errechnet sich hieraus als 0,072 ... Quadratmeilen, das ist bereits eineinhalb man so viel wie der Flächeninhalt des zu Beginn betrachteten Dreiecks. Einige Berater der Dido schlugen vor, nicht das Sechseck, sondern das regelmäßige Achteck als Fläche ihres abzusteckenden Landes zu wählen. Auch dieses kann man in Dreiecke zerlegen und — nicht mehr so leicht wie beim Sechseck, aber doch — die Flächeninhalte der einzelnen Dreiecke ermitteln. Addiert man sie, erhält man den Inhalt des Achtecks, der sich bei einem Umfang von einer Meile als 0,075 ... Quadratmeilen errechnet. Dido aber hatte eine noch viel bessere Idee: das Land sollte an der geradlinigen Küste zum Mittelmeer von dem Band umspannt werden. Für die Küste selbst braucht man das Band nicht, es muss nur die Binnengrenze festlegen.



Wunderbar, meinte der erste Berater der Dido, dann ziehen wir das Band von einem Punkt der Küste schräg mitten hinein ins Land bis zur Hälfte des Bandes, und dann wieder in die andere Richtung schräg hinaus zur Küste. Doch je nachdem, welchen Winkel das Band an seiner Mitte einschließt, ergeben sich Flächen mit verschieden großen Inhalten: Wenn der Winkel 60° beträgt, also die Fläche wieder ein gleichseitiges Dreieck bildet, errechnet sich deren Inhalt als 0,108 ... Quadratmeilen. Wenn hingegen der Winkel 90° beträgt, das Band folglich die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks mit der Küstenlinie als Hypotenuse bildet, errechnet sich deren Inhalt als 0,125 Quadratmeilen. Und wenn der Winkel 120° beträgt, die Fläche somit aus zwei halben gleichseitigen Dreiecken mit jeweils dem halben Band als einer begrenzenden Seite besteht, bekommt man wieder die kleineren 0,108 ... Quadratmeilen von vorher als deren Inhalt — der Winkel 90° scheint optimal zu sein.



Doch andere Berater schlugen vor, es mit einem Rechteck zu versuchen, am besten jenem, bei dem die zur Küste parallele Seite eine halbe Quadratmeile lang ist und die beiden zur Küste normalen Seiten jeweils eine viertel Quadratmeile lang sind. Dann erhält man eine Fläche mit 0,125 Quadratmeilen Inhalt, genauso groß wie beim oben genannten rechtwinkligen Dreieck mit dem Vorteil, dass man nun nicht so weit ins Landesinnere vordringt.

Wie aber wäre es, meinte eine dritte Beratergruppe, wenn die Fläche ein halbes regelmäßiges Sechseck mit dessen Durchmesser als Küstenlinie bildet? Sie rechneten sich deren Inhalt aus, indem sie die Fläche in drei gleich große gleichseitige Dreiecke zerlegten, und fanden, dass der so erhaltene Inhalt von 0,144 ... Quadratmeilen bemerkenswert groß ausfällt. Schließlich kamen die Verfechter des Achtecks zu Wort: Ihrer Meinung nach sollte der Flächeninhalt des halben Achtecks mit dessen Durchmesser als Küstenlinie noch größer sein als der des halben Sechsecks. Mit einiger Mühe gelang ihnen der Nachweis: Das halbe Achteck besitzt 0,150 ... Quadratmeilen Inhalt, der größte aller bisher erhaltenen Werte. Dido soll sich dazu entschlossen zu haben, das Band wie einen Halbkreis um die Küste auszulegen. Offenkundig entnahm sie den Ausführungen ihrer Berater: je besser sich ihre Vorschläge dem Halbkreis annähern, umso größer wird bei vorgegebenem Umfang des Bandes der eingeschlossene Flächeninhalt. Der Küstenstreifen, den sie auf diese Weise dem Fürsten Jarbas abluchste, bildete die sogenannte Byrsa, eine mauergeschützte Festung. Hieraus entwickelte sich das blühende phönizische Handelszentrum Karthago, ein späterer Konkurrent des römischen Reiches, das erst nach erbitterten Kriegen und schmählichen Intrigen von den Römern zerstört wurde.

Dido errichtet Karthago (Gemälde von William Turner)

Rudolf Taschner