

MATHE-BRIEF

November 2012 — Nr. 30

Herausgegeben von der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft http://www.oemg.ac.at/Mathe-Brief — mathe-brief@oemg.ac.at

Liebe Kolleginnen und Kollegen,

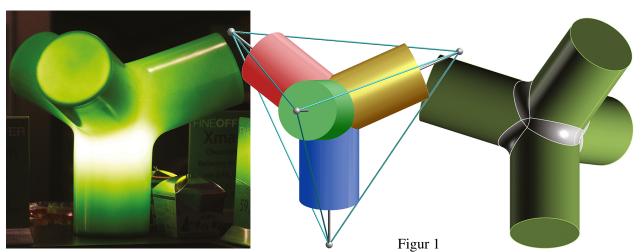
die Vektorrechnung ist ein elegantes Werkzeug in der Mathematik, und es gibt zahlreiche schöne Anwendungsbeispiele dafür. Zwei durchaus praxisbezogene Beispiele sollen hier vorgestellt werden. Sie sind auch für SchülerInnen der 6. Klasse durchaus verständlich, erfordern nur wenig Rechenaufwand und wirken wegen des Praxis-Bezugs motivierend.

ZWEI ANWENDUNGSBEZOGENE (FÄCHERÜBERGREIFENDE) RÄUMLICHE AUFGABEN, ELEGANT GELÖST MITTELS VEKTORRECHNUNG

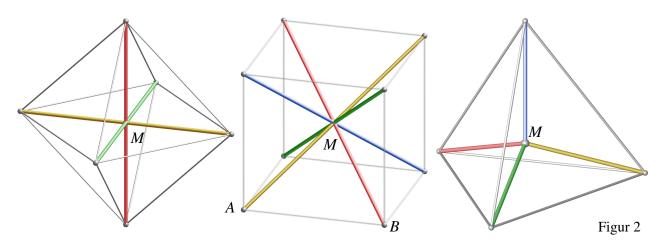
Aufgabenstellung: Wie kann man geschickt die Winkel der Höhen im Tetraeder bestimmen bzw. den "sphärischen Pythagoras" ableiten?

Beispiel 1: Welche Winkel bilden die Höhen eines regelmäßigen Tetraeders?

(a) Motivation: In der Natur findet man nur schwer exakte mathematische Formen, meist eher Näherungen. Unter den wenigen exakten Beispiele sind verschiedene Kristallgitter, etwa jenes des Diamanten bzw. Germaniums (perfekt tetraedrisch) oder des Kochsalzes (oktaedrisch). Aber auch im Design finden sich schöne Anwendungen zu diesem Thema (siehe Designerlampe Fig. 1).



(b) Die drei Raumdiagonalen eines Oktaeders bilden trivialerweise ein orthogonales Dreibein (Fig. 2 links). Beim Würfel (Fig. 2 Mitte) haben wir vier Raumdiagonalen.

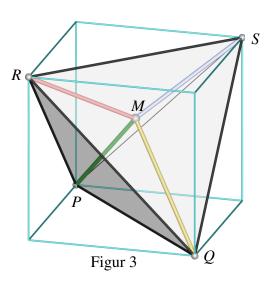


Zentrieren wir den Würfel um seinen Mittelpunkt M(0/0/0) und versehen wir seine Eckpunkte mit den Koordinaten A(1/-1/-1) (Ortsvektor \vec{a}), B(1/1/-1) (Ortsvektor \vec{b}), usw. Dann bilden z.B. die Richtungsvektoren $\overrightarrow{MA} = \vec{a}$ und $\overrightarrow{MB} = \vec{b}$ der Raumdiagonalen einen Winkel ϕ mit

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{1}{3}$$

Alle anderen Winkel sind aus Symmetriegründen gleich bzw. ergänzen einander auf 180° ($\cos \phi = -1/3$) Beim Tetraeder (Fig. 2 rechts) ist die Sache zunächst nicht so einfach, weil die Koordinaten der Eckpunkte "in Hauptlage" nur viel aufwändiger hinzuschreiben sind (und man mit Formeln – zumindest für die Höhe der Pyramide – arbeiten muss).

(c) Eine viel einfachere Darstellung der Koordinaten der Tetraeder-Punkte *PQRS* erhält man, wenn wie in Fig. 3 man den Tetraeder aus einem Würfel "schnitzt". Die Eckpunkte des Würfels haben wir schon mit Koordinaten versehen. Beim Berechnen der Winkel der Höhen fällt daher keine zusätzliche Arbeit an und wir erhalten $\cos \varphi = -1/3$, also $\varphi \approx 109,5^{\circ}$.



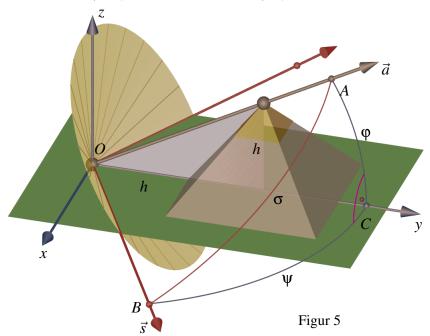
Beispiel 2: Wo geht die Sonne zur Sonnenwende auf bzw. unter?

(a) Motivation: Steinzeitliche Monumentalbauten wie Stonehenge (Fig. 4 links) oder Chichén Itzá (Fig. 4 Mitte und rechts) sind über viele hunderte von Metern und auf's Zehntelgrad genau in die Richtung zum Sonnenaufgang bzw. Sonnenuntergang am 21. Juni gerichtet.

Damals bestimmte man die entsprechenden Richtung empirisch als minimale Abweichung der aufgehenden bzw. untergehenden Sonne von der Nordrichtung. Die Richtungen wurde so genau gemessen, dass man erkennt, dass vor 4500 Jahren (Stonehenge) die Neigung δ der Erdachse zur Normalen der Ebene der Umlaufbahn der Erde um die Sonne um mehr als ein halbes Grad von der jetzigen Neigung von $\delta = 23,44^{\circ}$ abgewichen ist.



- (b) Hilfssatz 1: Man findet den Polarstern und damit die Richtung der Erdachse indem man nach Norden schaut und einen Höhenwinkel φ aufsucht, welcher der geografischen Breite entspricht. Bei der Chephren-Pyramide musste man z.B. von einem Punkt O, der genau im Abstand der Pyramidenhöhe h südlich der Pyramidenkante liegt, auf die Pyramidenspitze blicken, um den damaligen Polarstern Thuban zu sehen (Fig. 5).
- (c) Hilfssatz 2: Im Laufe eines Tage rotiert die Erde um ihre Achse. Relativ zur Erde gesehen dreht sich damit die Sonne um die Erdachse. Insbesondere zu den Sonnenwenden bleibt dabei der Winkel, den die Sonnenstrahlen mit der Erdachse bilden, im Laufe des Tages nahezu konstant, sodass die Sonnenstrahlen einen Drehkegel überstreichen. Zur Sommersonnenwende ist dieser Winkel $\sigma = 90^{\circ} \delta$, derzeit also $\approx 66,6^{\circ}$ (vor 4500 Jahren $\approx 66,0^{\circ}$).



(d) Wir definieren ein kartesisches Koordinatensystem mit Ursprung O und horizontaler (x,y)-Ebene, wobei die y-Achse in Nordrichtung schauen soll (Fig. 5), sodass die Erdachse in der yz-Ebene unter dem Höhenwinkel φ liegt und durch den bereits normierten Richtungsvektor $\vec{a} = (0,\cos\varphi,\sin\varphi)$ beschrieben wird (dabei ist φ die geografische Breite). Sei ψ der Winkel zwischen der Richtung zur untergehenden Sonne und der Nordrichtung. Der zugehörige ebenfalls bereits normierte Richtungsvektor ist dann $\vec{s} = (\sin\psi,\cos\psi,0)$. Der Winkel zwischen beiden Richtungen sei σ ; dann gilt $\cos\sigma = \vec{a} \cdot \vec{s}$, was zur einfachen Bedingung

führt. Konkret erhält man für Stonehenge (ca. 4500 Jahre alt, $\phi = 51, 2^{\circ}, \sigma = 66, 0^{\circ}$) bzw. Chichén Itzá (ca. 1000 Jahre alt, $\phi = 20, 7^{\circ}, \sigma = 65, 4$) die Werte $\psi \approx 49, 5^{\circ}$ bzw. $\psi \approx 63, 6^{\circ}$. Das Ergebnis kann man in Google-Earth-Bildern verifizieren (vgl. Fig. 4 Mitte).

(e) Denken wir uns die Einheitskugel um O, dann entsprechen den Winkeln ψ , φ und σ die Längen der Großkreisbögen in einem rechtwinkeligen spärischen Dreieck ABC, und Gleichung (1) entspricht der Formel für den pythagoräischen Lehrsatz auf der Kugel ("spärischer Pythagoras").

Georg Glaeser

Mögliche Literatur:

- [1] G. GLAESER: *Geometry and its Applications in Arts, Nature and Technology*, Springer Wien New York, Dez. 2012.
- [2] http://www1.uni-ak.ac.at/geom/dld/monumental.pdf
- [3] http://de.wikipedia.org/wiki/Tetraeder
- [4] http://www.soedernet.de/math/1samstage/07/Kugel.pdf