MATHE-BRIEF

Oktober 2012 — Nr. 29

Herausgegeben von der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft
http: // www.oemg.ac.at / Mathe–Brief ——— mathe–brief@oemg.ac.at

Das Smarties-Spiel

In weiser Voraussicht für den Regentag hat Opa Smarties besorgt, drei Kaffeetassen bereit gestellt und Anna und Bernhard ein Spiel vorgeschlagen:

Anna als Spiel-Leiterin versteckt unter einer der drei umgekehrten Kaffeetassen ein Smartie. Bernhard, der dabei natürlich wegschauen musste, darf dann raten, unter welcher Tasse das Smartie liegt, diese aber noch nicht umdrehen. Anna gibt ihm jetzt noch eine zusätzliche Chance: sie dreht von den beiden nicht gewählten Tassen eine um, unter der kein Smartie liegt (weil sie genau weiß, wo dieses versteckt ist), und fragt Bernhard, ob er jetzt seine ursprüngliche Tassen-Wahl noch ändern will, oder bei seiner ursprünglichen Wahl bleibt. Die endgültig gewählte Tasse wird umgedreht. Wenn darunter ein Smartie auftaucht, bekommt es Bernhard, im anderen Falle Anna.

Bevor das Spiel losgeht, kommen noch Christoph und Dora dazu und möchten mittun. Sie dürfen zwar nicht wie Bernhard wählen, sich aber vor dem Umdrehen der Tasse entweder Bernhards Entscheidung anschließen oder nicht. Je nachdem, ob sie richtig oder falsch geraten haben, bekommen sie aus Opas Fundus ein Smartie oder nicht.

Nach einigen Runden fällt Opa auf, dass Bernhard, Christoph und Dora offenbar verschiedene Strategien anwenden. Auf seine Frage hin erläutert Christoph: „Bernhard hat bei seiner Entscheidung, ob er an seiner ursprünglichen Wahl festhält oder nicht, ohnehin nur mehr eine Tasse ohne und eine Tasse mit Smartie vor sich, die Wahrscheinlichkeit, dass er richtig tippt, ist also $1/2$. Ich habe mir deshalb zur Regel gemacht, abwechselnd seiner Entscheidung zuzustimmen beziehungsweise nicht zuzustimmen. Bisher bin ich damit ganz gut gefahren.“ Dora erläutert ihre Strategie so: „Christoph hat schon gesagt, dass es gleich ist, wie man sich auf die Frage von Anna hin entscheidet. Ich lasse es deshalb einfach vom Zufall abhängen, ob ich mich Bernhards Entscheidung anschließe oder nicht. Ich bin mit dem Resultat bisher auch zufrieden.“ Und Bernhard? Der grinst und sagt: „Weil es nach der Frage von Anna ohnehin fifty-fifty steht, bin ich zu faul, um nochmals über Entscheidungen nachzudenken, und bleibe stur einfach bei meinem ersten Tipp.“ Worauf Anna etwas pickiert findet: „Lieber Bernhard, damit drängst du mich in die Position der Zweiflerin, die jedesmal deinen ersten Tipp verwirft. Aber bitte - wie du willst!“

Nach hundert Runden haben Anna 70, Bernhard 30, Christoph 54 und Dora 55 Smarties ergattert. Bernhard hadert etwas mit seinem Schicksal und verwünscht die Wahrscheinlichkeitsrechnung, während Anna ihre unerwartete Ausbeute genießt. Opa lächelt auf dem Stockzahn und macht Bernhard darauf aufmerksam, dass er sich von vornherein hätte ausrechnen können, dass er, wenn er immer bei seiner ersten Wahl bleibt, eben nur in etwa einem Drittel der Fälle richtig raten würde, was Anna zu ungefähr zwei Dritteln der Smarties verhilft. Es stimmt zwar, dass in jedem einzelnen Fall die Wahrscheinlichkeit, auf Annas Frage die richtige Tasse zu erraten, gleich $1/2$ ist, aber in zwei Dritteln der Fälle (nämlich jedesmal, wenn Bernhard zuerst auf eine falsche Tasse getippt hat) führt ein Wechsel der Tassenwahl zum Erfolg, und nur in einem Drittel der Fälle (nämlich, wenn Bernhard gleich von Beginn an die richtige Tasse erraten hat) verhilft ihm ein Beharren auf seiner ersten Wahl zu einem Smartie. Die Wahrscheinlichkeit, ein Smartie zu bekommen, ist sowohl für Christoph wie auch für Dora die Hälfte der Erfolgswahrscheinlichkeit bei Wahlwechsel ($= 1/2 \cdot 2/3 = 1/3$) plus der Hälfte der Erfolgswahrscheinlichkeit bei Wahlbeibehalt ($= 1/2 \cdot 1/3 = 1/6$), zusammen also gleich $1/2$.

Wie haben Anna, Bernhard und Dora erreicht, dass ihre Wahl wirklich „zufällig" getroffen wurde? Sie haben einen Würfel verwendet. Anna hat die Tassen mit A, B und C bezeichnet und das Smartie unter Tasse A gelegt, wenn sie 1 oder 2 Augen gewürfelt hat, unter Tasse B bei 3 oder 4 Würfelaugen, und unter Tasse C bei 5 oder 6 Würfelaugen. Bernhard hat auch gewürfelt und nach dem gleichen System die Tasse A, B oder C gewählt. Und Dora hat ebenfalls gewürfelt und sich bei 1, 2 oder 3 Augen der Wahl von Bernhard angeschlossen, im anderen Falle aber nicht.

Die genannten Zahlen sind nicht erfunden. Sie haben sich allerdings ergeben, auch ohne dass Opa einen Regentag abwarten und Anna, Bernhard, Christoph und Dora bemühen musste. Er hat einfach allein hundertmal mit drei verschiedenfarbigen Würfeln gewürfelt. Jeder kann es ihm nachmachen. Es wird immer etwas anderes herauskommen, die Wahrscheinlichkeiten bleiben aber immer dieselben.

Für den Würfel-Experimentator kann die Ausschüttung der Smarties nach Belieben geregelt werden.

G. Helmberg

Literatur

STEPHEN LUCAS, JASON ROSENHOUSE, ANDREW SCHEPLER: *The Monty Hall Problem, Reconsidered.* Mathematics Magazine **82** No. 5 (December 2009), 332–342.