MATHE-BRIEF

Juli 2012 — Nr. 27

Herausgegeben von der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft
http: // www.oemg.ac.at / Mathe–Brief ——— mathe–brief@oemg.ac.at

Schon ab der zweiten Klasse kann man der Frage nachgehen: Ist die Summe unendlich vieler Zahlen unendlich groß? Voraussetzung ist hierfür, dass die Schülerinnen und Schüler sicher periodische und nicht-periodische Dezimalzahlen als Brüche schreiben können (und umgekehrt). Dieser Mathebrief bietet dazu eine Sammlung von Beispielen. Alle Aufgaben und Grafiken stammen aus [1].

ADDIERE UNENDLICH VIELE ZAHLEN!

Addieren von Dezimalbrüchen. Ein Dezimalbruch (Zehnerbruch) ist ein Bruch, dessen Nenner eine Zehnerpotenz 10^k mit $k \in \mathbb{N}$ ist.

Aufgabe 1. Berechne $\frac{5}{10}+\frac{5}{100}+\frac{5}{1000}+\cdots$ und gib das Ergebnis als Bruch an! *Lösung:*

$$\frac{5}{10}+\frac{5}{100}+\frac{5}{1000}+\ldots = 0,5+0,05+0,005+\ldots = 0,5555\ldots = 0,\dot{5} = \frac{5}{9}.$$

Aufgabe 2. Paulina soll eine Summe von Dezimalbrüchen aufschreiben, die als Ergebnis $0,\dot{3}\dot{4}$ hat. Sie rechnet so:

$$\begin{aligned} 0,\dot{3}\dot{4} &= 0,\dot{3}+0,0\dot{4} = 0,333\ldots+0,0444\ldots \\ &= \frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\frac{3}{1000}+\ldots+\frac{4}{100}+\frac{4}{1000}+\frac{4}{10000}+\ldots \end{aligned}$$

und erhält zwei mögliche Lösungen:

$$\begin{aligned} 0,\dot{3}\dot{4} &= \frac{3}{10}+\frac{43}{100}+\frac{43}{1000}+\cdots \quad \text{oder} \\ 0,\dot{3}\dot{4} &= \frac{34}{100}+\frac{34}{1000}+\frac{34}{10000}+\cdots \end{aligned}$$

Welche der angeführten Lösungen ist korrekt?

Lösung: Beide Ergebnisse sind falsch, denn es ist zum Beispiel:

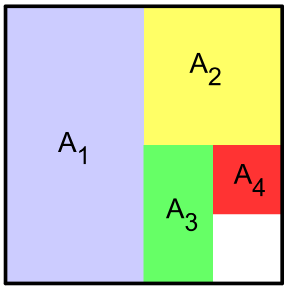
$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{\frac{3}{10}+\frac{43}{100}}_{\frac{7}{10}+\frac{3}{100}}+\frac{43}{1000}}_{\frac{7}{10}+\frac{7}{100}+\frac{3}{1000}}+\frac{43}{10000}}_{\frac{7}{10}+\frac{7}{100}+\frac{7}{1000}+\frac{3}{10000}}+\ldots = 0,777\ldots = 0,\dot{7} = \frac{7}{9} \neq 0,\dot{3}\dot{4}$$

Korrekt wäre: $0,\dot{3}\dot{4} = 0,343434\ldots = \frac{34}{100}+\frac{34}{10000}+\frac{34}{1000000}+\cdots$

Als Ergänzung bietet sich an:

$$99\cdot 0,\dot{3}\dot{4} = 100\cdot 0,\dot{3}\dot{4} - 0,\dot{3}\dot{4} = 34, \qquad 0,\dot{3}\dot{4} = \frac{34}{99}$$

Anschaulich (geometrisch) addieren. Skizzen helfen oft dann, wenn Brüche aufsummiert werden, deren Nenner eine Zweierpotenz 2^k mit $k \in \mathbb{N}$ ist.



Aufgabe 3. Wie viel ist $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots$? Verwende die nebenstehende Skizze!

Lösung: Die einzelnen Brüche können wir als Anteile der Quadratfläche interpretieren:

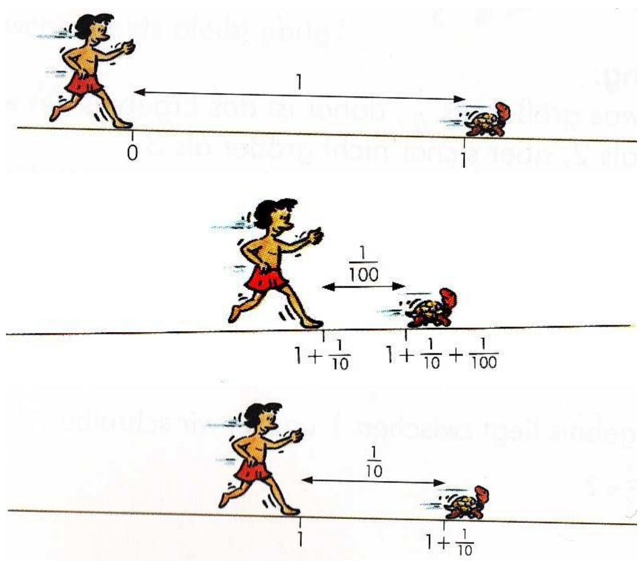
Name	A_1	A_2	A_3	A_4	...
Anteil an Quadratfläche	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	...

Alle (unendlich vielen) Rechtecksflächen decken das Ausgangs-Quadrat vollständig ab. Daher gilt: $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots=1$.

Achill und die Schildkröte. Die Geschichte, die Grundlage der folgenden Aufgabe ist, stammt vom griechischen Philosophen *Zenon* (500 v.Chr.). Siehe dazu [2].

Aufgabe 4. Achill, der schnellste Läufer Griechenlands, tritt in einem Wettrennen gegen eine Schildkröte an. Er läuft zehnmal so schnell wie die Schildkröte. Damit der Wettlauf nicht gleich nach dem Start entschieden wird, bekommt die Schildkröte einen Vorsprung von 1 Stadion (ca. 180 m). Überholt Achill die Schildkröte? Rechne nach!

Lösung: Wir überlegen, wie viele Stadien Achill laufen muss.



Am Anfang hat die Schildkröte 1 Stadion Vorsprung.

Achill läuft dieses eine Stadion „in null komma nichts“. Aber sobald er diesen Vorsprung eingeholt hat, ist die Schildkröte schon etwas weiter. Da ihre Geschwindigkeit nur $\frac{1}{10}$ der Geschwindigkeit von Achill ist, beträgt ihr Vorsprung jetzt genau $\frac{1}{10}$ Stadion.

Achill hat auch diese Strecke schnell geschafft. Insgesamt ist er jetzt schon $1+\frac{1}{10}$ Stadien gelaufen. Aber die Schildkröte ist in der selben Zeit auch weitergelaufen – genau $\frac{1}{100}$ Stadion.

Achill läuft auch diese Strecke. Insgesamt ist er jetzt schon $1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}$ Stadien gelaufen.

Insgesamt muss Achill daher $1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\cdots$ Stadien laufen, um die Schildkröte einzuholen. Egal, wie nahe er der Schildkröte kommt – die Schildkröte ist immer ein kleines Stück voraus. Dein Hausverstand sagt dir aber, dass Achill dir Schildkröte überholen wird! Mathematisch gesehen heißt das aber, dass $1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\cdots$ Stadien keine unendlich lange Strecke sein können. Also kann eine Summe von unendlich vielen Zahlen eine “vernünftige“ Zahl als Ergebnis haben!

Teleskopsummen und der „kleine Gauß“. Oftmals müssen wir nicht unendlich viele, sondern „nur“ sehr viele Zahlen addieren. *Teleskopsummen* ziehen sich nach einigen geschickten Umformungen „wie ein Teleskop zusammen“.

Aufgabe 5. Berechne: $\frac{2}{3\cdot5}+\frac{2}{5\cdot7}+\frac{2}{7\cdot9}+\cdots+\frac{2}{97\cdot99}$

Lösung: Wir schreiben die einzelnen Summanden zuerst als Differenzen einfacher Brüche an: $\frac{2}{3\cdot5}=\frac{2}{15}=\frac{5-3}{15}=\frac{1}{3}-\frac{1}{5}$ und analog $\frac{2}{5\cdot7}=\frac{1}{5}-\frac{1}{7}$, $\frac{2}{7\cdot9}=\frac{1}{7}-\frac{1}{9}$, und so weiter. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}&\tfrac{2}{3\cdot5}+\tfrac{2}{5\cdot7}+\tfrac{2}{7\cdot9}+\cdots+\tfrac{2}{97\cdot99}\\ &=\left(\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{5}\right)+\left(\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{7}\right)+\left(\tfrac{1}{7}-\tfrac{1}{9}\right)+\cdots+\left(\tfrac{1}{95}-\tfrac{1}{97}\right)+\left(\tfrac{1}{97}-\tfrac{1}{99}\right)\\ &=\tfrac{1}{3}+\left(\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{5}\right)+\left(\tfrac{1}{7}-\tfrac{1}{7}\right)+\left(\tfrac{1}{9}-\tfrac{1}{9}\right)+\cdots+\left(\tfrac{1}{97}-\tfrac{1}{97}\right)+\tfrac{1}{99}=\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{99}=\tfrac{32}{99}.\end{aligned}$$

Übungsaufgaben.

(1) Berechne und gib das Ergebnis, wenn möglich, als Bruch an!
   (a) $\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\cdots$ (b) $3+\frac{4}{100}+\frac{4}{1000}+\frac{4}{10000}+\cdots$
   (c) $\frac{8}{10}+\frac{5}{1000}+\frac{5}{10000}+\frac{5}{100000}+\cdots$ (d) $\frac{1}{10}+\frac{2}{100}+\frac{1}{1000}+\frac{3}{10000}+\cdots$

(2) Ermittelt den Wert der Summe, indem ihr eine grafische Darstellung verwendet! Experimentiert mit verschiedenen Möglichkeiten (Quadrate, Strecken, Kreise, ...).
   (a) $\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots$ (b) $\frac{3}{2}+\frac{3}{4}+\frac{3}{8}+\frac{3}{16}+\cdots$
   (c) $1+\frac{5}{2}+\frac{5}{4}+\frac{5}{8}+\frac{5}{16}+\cdots$

(3) Im Alter von neun Jahren kam Carl Friedrich *Gauß* (1777–1855) in die Volksschule. Dort stellte sein Lehrer *Büttner* seinen Schülern als Beschäftigung die Aufgabe, die Zahlen von 1 bis 100 zu summieren. Gauß löste diese Aufgabe, indem er 50 Paare mit der Summe 101 bildete: $1+100$, $2+99,\ldots,50+51$ Als Ergebnis erhielt er 5050.
   — Erkläre möglichst genau, wie Gauß gerechnet hat!
   — Funktioniert diese Methode immer? Auch wenn du eine ungerade Anzahl von Zahlen addieren musst?

(4) Berechne nach der Methode von C.F. Gauß:
   (a) $1+2+\cdots+49+50$ (b) $1+2+\cdots+62+63$
   (c) $4+6+8+\cdots96+98+100$

(5) Rechnet nach, dass Zenons Achill die Schildkröte nach $\frac{10}{9}=1,111\ldots$ Stadien einholt!

(6) Die Schildkröte bekommt 1 km Vorsprung. Achill läuft aber 100 mal so schnell wie die Schildkröte. Wie weit muss Achill diesmal laufen, bis er die Schildkröte einholt?

(7) Berechnet und gebt das Ergebnis, wenn möglich, als Bruch an!
   (a) $\frac{4}{2\cdot6}+\frac{4}{6\cdot10}+\frac{4}{10\cdot14}+\cdots+\frac{4}{82\cdot86}$ (b) $\frac{5}{2\cdot7}+\frac{5}{7\cdot12}+\frac{5}{12\cdot17}+\cdots+\frac{5}{102\cdot107}$
   (c) $\frac{3}{4}+\frac{3}{4\cdot7}+\frac{3}{7\cdot10}+\frac{3}{10\cdot13}+\cdots+\frac{3}{61\cdot64}$

Anita Dorfmayr

LITERATUR

[1] A. Dorfmayr, A. Mistlbacher, A. Nussbaumer: MatheBuch 2. Lehr- und Übungsbuch für die 2. Klasse HS und AHS. Verlag Ed. Hölzel, Wien 2006.

[2] http://de.wikipedia.org/wiki/Achilles_und_die_Schildkr%C3%B6te [10.06.2012]