MATHE-BRIEF

Juni 2012 — Nr. 26

Herausgegeben von der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft
http: // www.oemg.ac.at / Mathe–Brief ——— mathe–brief@oemg.ac.at

Technologienutzung am Beispiel von Differenzengleichungen

Der Fortschritt der Menschheit dokumentiert sich in seinen Werkzeugen. Werkzeuge sind zum einen Ergebnis von Erkenntnissen, und zum anderen sind neue Erkenntnisse nicht ohne Werkzeuge möglich.
(Volker Claus 1990)

Der Begriff „Rechner" zeigt schon, dass sich die Diskussion über Chancen und Gefahren von Technologienutzung im Mathematikunterricht meist auf Veränderungen beim Operieren beschränkt. Moderne Unterrichtssoftware ist aber nicht nur ein reines Rechenwerkzeug. Folgende Funktionen unterstützen und verändern den mathematischen Lernprozess und damit mathematische Kompetenz:

Modellierungswerkzeug. Technologie bietet eine leichtere Verfügbarkeit „klassischer" mathematischer Modelle und die effiziente Nutzbarkeit rechenaufwändiger Modelle (wie zum Beispiel Differenzengleichungen). Da komplexe Rechnungen die Technologie übernimmt, werden viele neue praxisnähere Anwendungen möglich. Die parallele Verfügbarkeit verschiedener Darstellungsformen ermöglicht eine neue Qualität der Modellentscheidung, Lösung und Interpretation (etwa durch die Variation von Parametern).

Visualisierungswerkzeug. Die Möglichkeit der graphischen Repräsentation abstrakter Objekte ist für die Kompetenzentwicklung im Allgemeinen und für alle Phasen des Problemlöseprozesses im Besonderen von großer Bedeutung. Ohne Technologie ist es oft schwierig, zur grafischen Darstellungsform zu wechseln. Mit Technologie steht die grafische Darstellung sehr rasch sogar parallel zu anderen Darstellungsformen zur Verfügung.

Experimentierwerkzeug. Kennzeichnend für den Weg der Lernenden in die Mathematik sind 3 Phasen:

— Experimentelle, heuristische Phase: Vermutungen werden durch Experimentieren gefunden.
— Exaktifizierende Phase: Erkenntnisse aus der heuristischen Phase werden auf eine gesicherte mathematische Basis gestellt.
— Anwendungsphase: Gesicherte Vermutungen werden zum Lösen von Problemen genutzt.

Die so wichtige experimentelle Phase, in welcher Vermutungen gefunden und Lösungswege entwickelt werden (Heuristik $\iff$ „Findungskunst"), wird durch Technologie oft erst überhaupt möglich. In der Anwendungsphase können Lösungen von interessanten Problemen, die der Schulmathematik bisher nicht zugänglich waren, experimentell ermittelt werden.

Rechenwerkzeug. Man kann zwar auch im Technologiezeitalter auf das „händische" Operieren mit dem Ziel, eine mathematische Lösung zu erhalten, nicht verzichten, aber komplexe Operationen können auf die Technologie ausgelagert werden. Dadurch wird Freiraum für andere mathematische Handlungen wie Modellieren, Interpretieren oder Argumentieren geschaffen.

Damit bedeutet das Auslagern auf die Technologie nicht eine Verarmung mathematischer Kompetenz – ganz im Gegenteil: Andere Kompetenzen werden unterstützt und neue Kompetenzen im Bereich des Operierens gewinnen an Bedeutung, wie etwa die Strukturerkennungskompetenz. Schüler/innen müssen

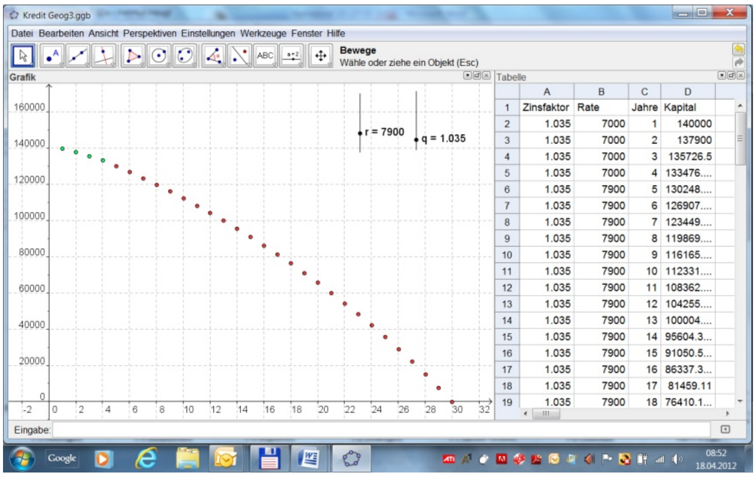
Ergebnisse interpretieren, die sie nicht selbst produziert haben. Es ist also eine neue Qualität von Kontrollkompetenz erforderlich.

In diesem „Mathebrief“ sollen am Beispiel von Differenzengleichungen die verschiedenen Werkzeugaspekte illustriert werden.[1]

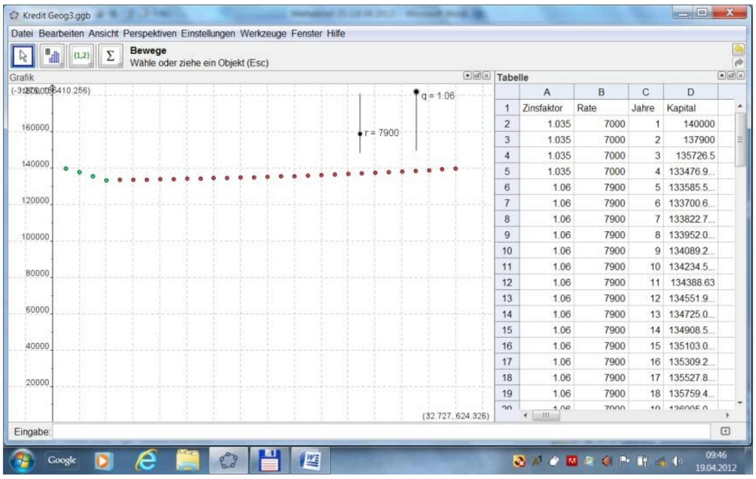
Beispiel 1. *Herr Mathemat benötigt ein Bauspardarlehen in der Höhe von 140.000,– EUR mit einer Laufzeit von 30 Jahren. Derzeit beträgt der Zinssatz 3.5%. Der Zinssatz kann gemäß dem Index Euribor auf bis zu 6% steigen. Für die ersten 4 Jahre werden 3,5% garantiert, es wird eine Jahresrate von EUR 7000,– vereinbart.*

Waren früher solche Probleme bestenfalls in der 6. Klasse beim Kapitel „Folgen und Reihen“ und mit Hilfe von Logarithmen lösbar, können heute Schülerinnen und Schüler der 4. Klasse diese Aufgabe bearbeiten. Das rekursive Modell reduziert das Problem auf die Frage: „Was passiert jedes Jahr?“ Die Antwort ist schon der wichtigste Schritt bei der Modellentscheidung: „Das Kapital wird verzinst und die Rate wird abgezogen“. Die Übersetzung in die Sprache der Mathematik ist dann nicht mehr so schwierig: $K_{\text{neu}} = K_{\text{alt}} \cdot (1 + \frac{p}{100}) - r$. Natürlich ist das eine Modellvereinfachung im Vergleich zur banküblichen Verrechnung, aber das wesentliche eines Tilgungsplanes wird dadurch doch erfasst.

Mit einer Lernumgebung wie etwa *GeoGebra*, wo Tabellenkalkulation und Graphik unter einer gemeinsamen Benutzeroberfäche angeboten werden, kann die Lösung mit Hilfe von Schiebereglern für r und für $q = 1 + \frac{p}{100}$ experimentell gefunden werden.

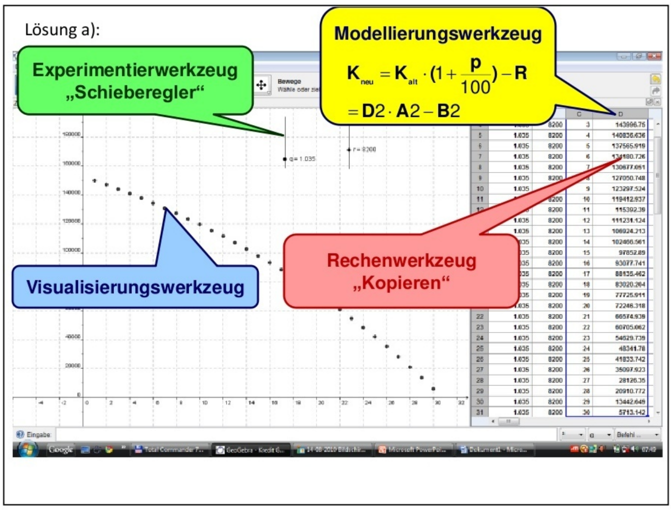


Man hält zuerst q bei 1.035 fest und verändert r so lange, bis der Kredit nach 30 Jahren abgezahlt ist. Es ergibt sich eine Jahresrate von etwa 7900,– EUR.



Steigert man den Zinssatz auf den von der Bank als möglich angegebenen Wert von 6%, stellt man erschrocken fest, dass nach 30 Jahren der Schuldenstand trotz jährlicher Zahlung von 7.900 EUR annähernd ungeändert ist. Dann muss man halt am „Ratenschieberegler“ so lange drehen, bis man das Ziel, nach 30 Jahren schuldenfrei zu sein, wieder erreicht hat.

[1] In einer Differenzengleichung ist $f(k+1) - f(k)$ eine Funktion von $f(k)$, in einer Differentialgleichung ist $f'(x)$ eine Funktion von $f(x)$.



Es werden also alle 4 Werkzeugkompetenzen zur Problemlösung genutzt: *Modellierungswerkzeug*, *Rechenwerkzeug*, *Visualisierungswerkzeug*, *Experimentierwerkzeug*.

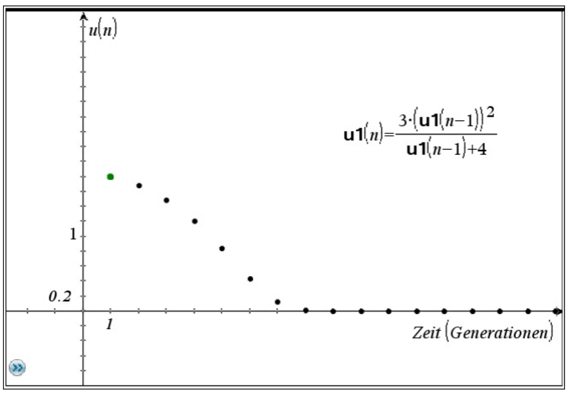
Beispiel 2: Sterile Insektentechnik [Timischl 1988; S. 22, S. 102–109]. *Eine Insektenpopulation mit anfangs n_0 Weibchen und Männchen möge bei natürlichem Wachstum pro Generation jeweils auf das r-fache wachsen. Zur Bekämpfung der Population wird pro Generation eine bestimmte Anzahl s von sterilen Männchen freigesetzt, die sich mit der Naturpopulation vermischen.*

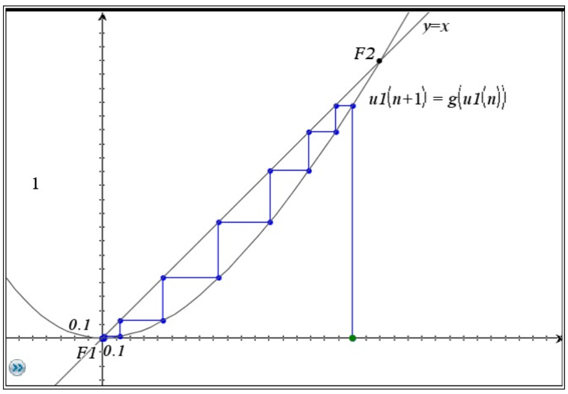
(a) *Entwickle ein mathematisches Modell für das Wachstum dieser Population*
(b) *Wie groß muss s sein, damit ein weiterer Populationszuwachs verhindert wird?*
(c) *Stelle das Populationswachstum grafisch dar (Modellannahme $r = 3$, $s = 4$, $y_0 = 1.8$ (in Millionen)) und zwar als Zeitdiagramm ($y_n = f(n)$) und im Webmodus ($y_{n+1} = g(y_n)$)*
(d) *Verändere die Parameter s und y_0 und untersuche, unter welchen Bedingungen die Population abnimmt, wächst bzw. sich ein Gleichgewichtszustand einstellt.*

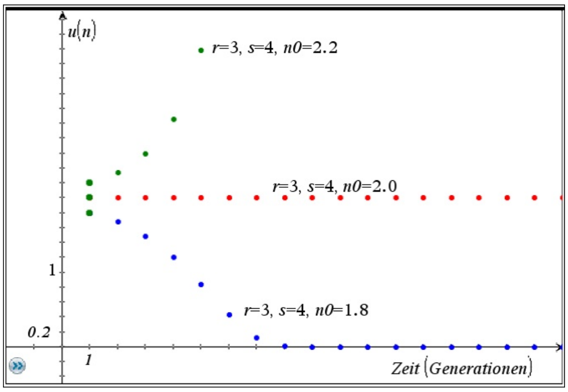
(a). Ohne Eingriff in das Populationswachstum wäre das Wachstumsmodel: $y_{n+1} = r \cdot y_n$. Wenn dagegen s sterile Männchen freigelassen werden, so ist von den y_n Paarungen nur der Anteil $y_n/(y_n+s)$ fertil. Daher gilt für das Populationswachstum: $y_{n+1} = r \cdot y_n \cdot \frac{y_n}{y_n+s} = \frac{r y_n^2}{y_n+s} = g(y_n)$.

(b). Die Populationsgröße nimmt ab, wenn gilt $\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{r y_n}{y_n+s} < 1$ (also auch für y_0). Daher gilt für s bei gegebenem y_0 und r: $s > y_0 \cdot (r-1)$.

(c). Graphische Lösung: Es gibt 2 Repräsentationsformen: Das „Zeit-Diagramm“ mit $y(n) = f(n)$ und das „Web-Diagramm“ mit $y(n+1) = g(y(n))$. Besonders für Konvergenzüberlegungen (für welche y ist $y = g(y)$?) ist die zweite Darstellungsform sehr hilfreich. (Bild 2 zeigt den Graphen der Funktion $y = g(x)$).







(d). Man kann entweder mehrere Graphen zeichnen oder mit Schiebereglern die Parameter verändern. Für $y_0 = 2$ stellt sich bei gegebenem $r = 3$ und $s = 4$ ein Gleichgewichtszustand ein.
Das Lösen eines solchen praktischen Problems erfordert also Interpretieren, Argumentieren und Dokumentieren basierend auf mathematischer Kompetenz.

Ausblick: Dieses Problem bietet die Möglichkeit, eine Menge mathematischer Themen zu behandeln, die wiederum verschiedenste Kompetenzen erfordern. Mögliche Fragestellungen:

— Unter welchen Bedingungen ist die Folge $\langle y_n \rangle$ streng monoton fallend und nach unten beschränkt?
— Existieren Grenzwerte?
— Welche Art von Gleichgewichtspunkten (Fixpunkten) existieren? Vor allem für diese Frage ist die Visualisierung als Web-Diagramm sehr hilfreich. Man kann experimentell anziehende und abstoßende Fixpunkte erkennen.

Für diese Aufgabe wurde der *TI Nspire* verwendet. Diese Lernumgebung bietet verschiedene Werkzeuge an (CAS, dynamische Geometrie, Tabellekalkulation, Graphik usw), die interaktiv miteinander vernetzt werden können. Ein großer Vorteil ist auch, dass ein CAS-Taschenrechner mit der entsprechenden PC-Software voll kompatibel ist.

Resümee. Ich habe versucht, am Beispiel der Differenzengleichungen zu zeigen, wie Technologienutzung die Entwicklung mathematischer Kompetenz unterstützen und bereichern kann. Natürlich darf man die Gefahr nicht unterschätzen, dass bei einem falschen didaktischen Konzept des „Knöpfedrückens“ Technologie auch eine gefährliche Waffe sein kann.

Die Tatsache, dass ab 2018 Technologie (CAS, Tabellenkalkulation usw.) bei der Zentralmatura verlangt sein wird, zeigt, wie wichtig es ist, dass sich die Lehrerinnen und Lehrer schon jetzt intensiv mit diesem Thema auseinandersetzen. Die ersten Schülerinnen und Schüler, die davon betroffen sein werden, sitzen schon in der 2. Klasse!

Helmut Heugl

LITERATUR

[1] Claus, V. (1990): Perspektiven der Informatik. In: *login* 10/6, S.43–47.
[2] Dörfler, W. (1991): Der Computer als kognitives Werkzeug und kognitives Medium. In: Dörfler, W. et al (Hrsg.), *Computer—Mensch—Mathematik*. Hölder-Pichler-Tempsky u. Teubner, Wien. S. 51–75.
[3] Heugl, H., Klinger, W. und Lechner, J. (1996). *Mathematikunterricht mit Computeralgebrasystemen*. Addison-Wesley. S. 83ff.
[4] Timischl, W. (1988): *Biomathematik – Eine Einführung für Biologen und Mediziner*. Springer-Verlag Wien New York.

Leserinnen und Lesern, die sich mit GeoGebra noch nicht hinreichend vertraut fühlen, um die Konstruktion der ersten beiden Arbeitsblätter nachzuvollziehen, wird in Mathe-Brief 26a *(http://www.oemg.ac.at/Mathe-Brief/mbrief26a.pdf)* eine Hilfestellung angeboten.