MATHE-BRIEF

April 2012 — Nr. 24

Herausgegeben von der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft
http: // www.oemg.ac.at / Mathe–Brief ——— mathe–brief@oemg.ac.at

Wie findet man ägyptische Brüche?

Im alten Ägypten verwendete man (von $\frac{2}{3}$ abgesehen) nur Stammbrüche, also Brüche der Form

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots,$$

und man stellte andere Bruchzahlen als Summe von Stammbrüchen dar. Dies ist gemeint, wenn man heute von 'Ägyptischen Brüchen' spricht. Eine historische Notiz dazu findet man in Mathe-Brief Nr. 7.

Diese Darstellung ist nicht eindeutig, wie die Beispiele

$$\frac{5}{24} = \frac{1}{5} + \frac{1}{120} = \frac{1}{6} + \frac{1}{24}$$

$$\frac{3}{14} = \frac{1}{5} + \frac{1}{70} = \frac{1}{6} + \frac{1}{21} = \frac{1}{7} + \frac{1}{14}$$

zeigen. Wir wollen aber der Frage nachgehen, wie man denn so eine Darstellung finden kann.

Natürlich gibt es eine einfache Antwort, man addiere den Bruch $\frac{1}{b}$ genau a-mal und erhält

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{b} + \cdots + \frac{1}{b}.$$

Die Frage ist, wie man eine nicht allzu lange Darstellung findet. Hier wird eine Methode, die auf die Mathematiker F. Engel (1861–1941) und W. Sierpinski (1882–1969) zurückgeht, vorgestellt.

Es sei $x_0 = \frac{a}{b}$ eine rationale Zahl mit $0 < x_0 < 1$, die wir als Summe von Stammbrüchen darstellen wollen. Die ganze Zahl k sei bestimmt durch die Forderung

$$k + 1 \geq \frac{b}{a} > k,$$

die gleichbedeutend ist mit

$$\frac{1}{k+1} \leq \underbrace{\frac{a}{b}}_{=x_0} < \frac{1}{k}.$$

Dann ist $b \leq (k+1)a$ und $ka < b$, also

$$0 \leq (k+1)a - b = a + ka - b < a.$$

Wir setzen

$$x_1 = (k+1)x_0 - 1.$$

Dann ist $x_1 = \frac{(k+1)a-b}{b} < \frac{a}{b} = x_0$ und man wiederhole das Spiel mit x_1. So erhält man eine Folge von Brüchen $x_0 > x_1 > x_2 > \cdots \geq 0$, die alle den gleichen Nenner b haben. Daher muss einmal $x_n = 0$ eintreten. Das Verfahren bricht ab. Anderseits ist doch $(k_1 = k)$

$$x_0 = \frac{1}{k_1+1} + \frac{x_1}{k_1+1} = \frac{1}{k_1+1} + \frac{1}{(k_1+1)(k_2+1)} + \frac{x_2}{(k_1+1)(k_2+1)} = \ldots,$$

so dass eine Darstellung als Summe von Stammbrüchen bald gefunden ist.

Wir rechnen ein Beispiel vor. Es sei

$$x_0 = \frac{5}{31}.$$

Dann ist $6 < \frac{31}{5} < 7$, und wir erhalten

$$x_1 = 7 \cdot \frac{5}{31} - 1 = \frac{4}{31}.$$

Aus $7 < \frac{31}{4} < 8$ ergibt sich

$$x_2 = 8 \cdot \frac{4}{31} - 1 = \frac{1}{31},$$

und das Verfahren ist erfolgreich. Also erhalten wir

$$\frac{5}{31} = \frac{1}{7} + \frac{1}{7 \cdot 8} + \frac{1}{7 \cdot 8 \cdot 31}.$$

Natürlich ist dieses Verfahren zunächst eher eine mathematische Spielerei und ohne praktischen Nutzen. Es gestattet aber, einen einfachen Beweis für die Irrationalität der Zahl

$$e = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \cdots$$

zu führen! Wir wenden dieses Verfahren frech auf die Zahl

$$x_0 = e - 2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1$$

an. Aus $\frac{1}{2} < x_0 < 1$ folgt $k_1 = 1$ und daher $x_1 = 2x_0 - 1$:

$$x_1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \cdots < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^k} = \frac{1}{2}.$$

Aus $\frac{1}{3} < x_1 < \frac{1}{2}$ folgt $k_2 = 2$ und daher $x_2 = 3x_1 - 1$:

$$x_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 6} + \cdots < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^k} = \frac{1}{3}.$$

Aus $\frac{1}{4} < x_2 < \frac{1}{3}$ folgt $k_3 = 2$ und daher $x_3 = 4x_2 - 1$, und so fort. Das Verfahren bricht niemals ab. Daher kann $e - 2$ keine rationale Zahl sein, und daher ist auch e keine rationale Zahl!

Fritz Schweiger

Literatur

Hans Humenberger: *Ägyptische Brüche. Darstellung als Summe von Stammbrüchen.*
http://homepage.univie.ac.at/hans.humenberger/Aufsaetze/MNU 3 2011 140-147.pdf