MATHE-BRIEF

März 2012 — Nr. 23

Herausgegeben von der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft
http: // www.oemg.ac.at / Mathe–Brief ——— mathe–brief@oemg.ac.at

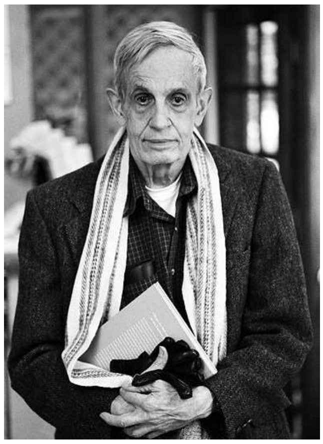
SPIELTHEORIE

Die Spieltheorie beschäftigt sich mit Entscheidungssituationen, mit strategischen Konflikten, in denen mindestens zwei Parteien (Spieler) interagieren. Sie kann optimales Verhalten und strukturelle Ähnlichkeiten aufzeigen. Die grundlegende Idee besteht darin, die Situation als strategisches *Spiel* zu modellieren. Anwendungsgebiete finden sich in Wirtschaftswissenschaften, Soziologie, Biologie, Psychologie, Militärstrategie, usw. Das Thema eignet sich zur Behandlung in einem Wahlpflichtfach Mathematik, zur Begabtenförderung und als Thema für eine vorwissenschaftliche Arbeit [2].

Zwei gebürtige Österreicher, der rechts abgebildete Mathematiker *John von Neumann* (1903–1957) und der Wirtschaftswissenschafter *Oskar Morgenstern* (1902–1977), die beide in die USA ausgewandert sind, dort gelebt und gearbeitet haben, gelten als die Begründer der Spieltheorie. Sie veröffentlichten im Jahre 1944 gemeinsam das Buch *Theory of Games and Economic Behavior* [4].

John von Neumann

Aus dem Hollywood-Film *A Beautiful Mind – Genie und Wahnsinn* allseits bekannt ist der amerikanische Spieltheoretiker *John F. Nash* (geboren 1928). Der Film erzählt seine Lebensgeschichte und wurde mehrfach mit Oscars und Golden Globes ausgezeichnet. John F. Nash erhielt 1994 den Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften. Dies ist umso beachtlicher, als es keinen eigenen Nobelpreis für Mathematik gibt. Nash war damit der erste von bisher acht Spieltheoretikern, die für ihre Arbeit den Wirtschafts-Nobelpreis erhielten.



John Nash

Das Gefangenendilemma.

Aufgabenstellung: Albert und Bernhard werden verdächtigt, gemeinsam eine Straftat begangen zu haben. Sie werden unabhängig voneinander verhört, ohne sich vorher abstimmen zu können. Da es keine Beweise gibt, schlägt der Staatsanwalt jedem Gefangenen folgenden Handel vor:

- *Kooperation:* Sollten beide schweigen, so werden sie auf Grund kleinerer Delikte zu je 2 Jahren Haft verurteilt.
- *Defektion:* Legen beide ein Geständnis ab, so müssen sie wegen Zusammenarbeit mit den Ermittlungsbehörden nicht die Höchststrafe von 5 Jahren absitzen. Sie werden in diesem Fall zu je 4 Jahren Haft verurteilt.

- *Defektion / Kooperation:* Gesteht nur einer der Gefangenen und der andere schweigt, so kommt der erste als Kronzeuge frei. Der zweite Gefangene muss in diesem Fall die Höchststrafe von 5 Jahren absitzen.

Lösung: Den beschriebenen Handel stellen wir übersichtlich in Form von Matrizen dar, in der wir die Haftjahre eintragen – negativ, weil sich eine Verminderung ihrer Anzahl positiv auswirkt und wir so mit weiter unten beschriebenen Beispielen konsistent bleiben. Wir schreiben A für Albert und B für Bernhard.

Haftjahre für Albert

	B schweigt	B gesteht
A schweigt	−2	−5
A gesteht	0	−4

Haftjahre für Bernhard

	B schweigt	B gesteht
A schweigt	−2	0
A gesteht	−5	−4

Albert überlegt seine Strategie:

- Wenn Bernhard schweigt, ist es für mich besser zu gestehen. Denn dann komme ich frei und muss nicht 2 Jahre absitzen.
- Wenn Bernhard gesteht, sollte ich auch gestehen. 4 Jahre Haft sind besser als 5 Jahre.

Albert wird daher gestehen. Bernhard überlegt genau wie Albert. Auch er wird daher gestehen.

Das Ergebnis des Spiels zeigt ein Dilemma: Beide „Spieler“ wollen den persönlichen Nutzen optimieren, das heißt eine möglichst kurze Haftstrafe bekommen. Daher werden sie gestehen und haben jeweils 4 Jahre Gefängnis vor sich. Für beide wäre es jedoch besser gewesen, zu schweigen, denn dann wären sie mit nur je 2 Jahren Haft davon gekommen.

Allerdings wäre mit der Strategie „Schweigen, Schweigen“ auch ein Stabilitätsrisiko verbunden: wenn nachträglich einer von beiden auf „Gestehen“ umschwenkt, während der andere bei „Schweigen“ bleibt, verbessert der erste seine Situation spürbar: er braucht nicht mehr in das Gefängnis, dafür verlängert sich für seinen Komplizen aber die Haft.

Das Gefangenendilemma zeigt, dass Kooperation nicht funktioniert, wenn nur der eigene Nutzen und nicht (auch) der Nutzen der Gemeinschaft bei der Entscheidung mit einbezogen wird. Dieses Dilemma taucht nicht nur in der Kriminalistik, sondern oft auch in den Wirtschaftswissenschaften und der Soziologie auf.

Nash-Gleichgewicht. Die Überlegungen, die wir zur Lösung des Gefangenendilemmas angestellt haben, gehen auf John Nash zurück. Das Ergebnis „Gestehen, Gestehen“ hat eine Eigenschaft, durch die ein *Nash-Gleichgewicht* definiert ist: keiner der beiden Spieler kann durch einseitiges Abweichen von der Strategie „Gestehen“ seine Situation verbessern. Weicht Albert von der für ihn optimalen Strategie „Gestehen“ ab, so hat er mehr Haftjahre zu erwarten. Das gleiche gilt für Bernhard.

Das an sich für beide Spieler beste Strategie-Paar „Schweigen, Schweigen“ würde kein Nash-Gleichgewicht liefern: jeder der beiden könnte dann durch einseitiges „Gestehen“ die eigene Situation verbessern.

Kompakter als vorhin können wir die Haftjahre aus dem Gefangenendilemma in Form einer *Auszahlungsmatrix* darstellen. Dies ist eine *Bimatrix* – in jedem Feld werden je zwei Einträge gemacht:

In den Zeilen und Spalten werden die möglichen Strategien der beiden Spieler angeführt. Die erste Eintragung in jedem Feld beschreibt jeweils die Auszahlung des ersten Spielers (Alberts Haftjahre), die zweite jene des zweiten Spielers (Bernhards Haftjahre).

	B schweigt	B gesteht
A schweigt	$-2, -2$	$-5, \ 0$
A gesteht	$0, -5$	$-4, -4$

Auch die Lösung des Spieles erhalten wir recht rasch mit Hilfe dieser Bimatrix: Wir überlegen zuerst für Spieler 1 (Albert) die (in rot geschriebene) *beste Antwort* auf jede Strategie von Spieler 2 (Bernhard).

	B schweigt	B gesteht
A schweigt	$-2, -2$	$-5, \ 0$
A gesteht	$\mathbf{0}, -5$	$\mathbf{-4}, -4$

Dann gehen wir für Spieler 2 analog vor, dessen *beste Antwort* auf jede Strategie von Spieler 1 in blau geschrieben ist:

	B schweigt	B gesteht
A schweigt	$-2, -2$	$-5, \ 0$
A gesteht	$\mathbf{0}, -5$	$\mathbf{-4}, \mathbf{-4}$

Das Feld, in dem beide Einträge hervorgehoben sind, liefert das Spielergebnis und – in diesem Falle – ein *Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien* (d.h. in Strategien, in denen jeder Spieler sich für genau eine der Alternativen entscheiden muss). In diesem Fall: Gestehen-Gestehen.

Weitere bekannte Spiele.

Aufgabenstellung: Man interpretiere bei den folgenden Spielen jeweils die Auszahlungsmatrix und bestimme die Nash-Gleichgewichte. Wie lautet das Ergebnis des Spiels?

Hirschjagd. Zwei Jäger J_1 und J_2 müssen sich unabhängig voneinander entscheiden, ob sie einen Hirsch jagen oder ob sie mit einem Hasen vorlieb nehmen. Den Hirsch bekommen sie nur, wenn sie zusammen auf die Jagd gehen und zusammenarbeiten, einen Hasen erlegt auch jeder für sich allein. Hirsch und Hase auf einmal zu jagen, ist nicht möglich. Die Auszahlungsmatrix lautet:

	J_2: Hirsch	J_2: Hase
J_1: Hirsch	5, 5	0, 1
J_1: Hase	1, 0	1, 1

Hier hat sich etwas gegenüber dem vorhergehenden Beispiel geändert: Während Albrecht sicher war, mit seiner Strategie „Gestehen" bei jeder Strategiewahl von Bernhard besser auszusteigen, als mit der Strategie „Schweigen", wäre hier J_1 mit der Strategie „Hirsch" besser dran, wenn J_2 die Strategie „Hirsch" wählt; wenn aber J_2 die Strategie „Hase" wählt, schneidet J_1 mit der Strategie „Hase" besser ab. Beim Gefangenen-Spiel war das Rezept, das ein vernünftiges Ergebnis geliefert hat: jeder Spieler wählt die für ihn optimale Strategie. Wie soll aber hier in konsistenter Weise eine optimale Strategie definiert werden? Der Minimalertrag für J_1, wenn er Strategie „Hirsch" wählt, ist 0; wenn er Strategie „Hase" wählt, ist sein Minimalertrag größer, nämlich 1. Wir gehen von der Vorstellung aus, dass J_1 jemand ist, der auf Nummer sicher gehen will, und definieren seine (rot eingezeichnete) optimale Strategie als jene, bei der sein Minimalertrag – je nachdem welche Strategie J_2 wählt – am größten ist, also für J_1 die Strategie „Hase“. Eine analoge Überlegung liefert auch für J_2 die (blau eingezeichnete) Strategie „Hase“. Wenn beide ihre optimale Strategie wählen, besteht wieder Nash-Gleichgewicht: keiner der beiden Spieler kann durch einseitige Änderung seiner Strategie seine Situation verbessern, jeder würde an Stelle des Ertrages 1 den Ertrag 0 erhalten.

Übrigens liefert auch die beiderseitige Wahl der Strategie „Hirsch“ ein Nash-Gleichgewicht: sowohl J_1 als auch J_2 würden bei Wechsel zur Strategie „Hase“ von 5 Ertragseinheiten auf 1 Ertragseinheit herunterfallen.

	J_2: Hirsch	J_2: Hase
J_1: Hirsch	5, 5	0, **1**
J_1: Hase	**1**, 0	**1**, **1**

Kampf der Geschlechter. Dominik und Marie sind ein junges Paar, die an sich am liebsten miteinander etwas unternehmen. Während aber Dominik sehr gerne auf den Fußballplatz geht, bevorzugt Marie einen Kinobesuch.

Die Auszahlungsmatrix (hier steht D für Dominik und M für Marie) gibt die Unterhaltungswerte für beide an:

	M: Fußball	M: Kino
D: Fußball	3, 1	1, 1
D: Kino	0, 0	2, 2

Wieder werden die optimalen Strategien für Dominik rot und für Marie blau eingezeichnet. Betrüblicherweise ist das Ergebnis der Anwendung optimaler Strategien, dass Dominik zum Fußball und Marie ins Kino geht; allerdings liefert dieses Ergebnis kein Nash-Gleichgewicht: wenn Dominik nachträglich doch bereit ist, ins Kino zu gehen, steigert das sein Vergnügen. Sowohl bei „Fußball, Fußball“ wie auch bei „Kino, Kino“, würde sich ein Nash-Gleichgewicht einstellen.

	M: Fußball	M: Kino
D: Fußball	**3**, 1	**1**, **1**
D: Kino	0, 0	2, **2**

Wenn die Unterhaltungswerte so verteilt sind

	M: Fußball	M: Kino
D: Fußball	3, 1	0, 0
D: Kino	0, 0	1, 3

dann gibt es nach obiger Definition für keinen von beiden eine eindeutig definierte optimale Strategie und kein dadurch eindeutig definiertes Ergebnis. Wohl aber liefern wieder die Strategienpaare „Fußball, Fußball“ und „Kino, Kino“ Nash-Gleichgewichte. Wenn allerdings optimale Strategie nicht durch maximalen Minimal-Ertrag sondern durch maximalen mittleren Ertrag definiert worden wäre (die Erträge bei den verschiedenen Partner-Strategien werden gemittelt), dann wäre wieder „Fußball“ die optimale Strategie für Dominik und „Kino“ die optimale Strategie für Marie mit dem gleichen betrüblichen Ergebnis und den gleichen Nash-Gleichgewichten wie vorher.

Ausblick. Es gibt Spiele, die – ähnlich wie das Gefangenendilemma – genau ein Nash-Gleichgewicht haben. Genau so können aber auch mehrere solche Gleichgewichte auftreten, oder aber ein Spiel hat kein Nash-Gleichgewicht.

Wir haben hier ausschließlich *Spiele mit reinen Strategien* behandelt. Interessant ist darüber hinaus die Analyse von *Spielen in gemischten Strategien*, in denen die Spieler ihre Strategie z.B. mit selbst bestimmten Wahrscheinlichkeiten wählen können, *Mehrpersonenspiele* und eine Formenvielfalt weiterer Arten von Spielen mit entsprechenden Strategie-Theorien, die in der Spieltheorie behandelt werden.

A. Dorfmayr

LITERATUR

[1] W. Ortmanns, A. Albert: *Entscheidungs- und Spieltheorie. Eine anwendungsbezogene Einführung*. Verlag Wissenschaft und Praxis, Dresden 2008.

[2] C. Brand et al: *Thema Mathematik 7: Angewandte Mathematik – Anregungen für die vorwissenschaftliche Arbeit*. Veritas, Linz 2012.

[3] A. Diekmann: *Spieltheorie. Einführung, Beispiele, Experimente*. Rowohlt, Hamburg 2009.

[4] J. von Neumann, O. Morgenstern: *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press, 1953 (3. Auflage). Online verfügbar unter: *http://www.archive.org/details/theoryofgamesand030098mbp*